UNIVERSIDAD DE TARAPACA

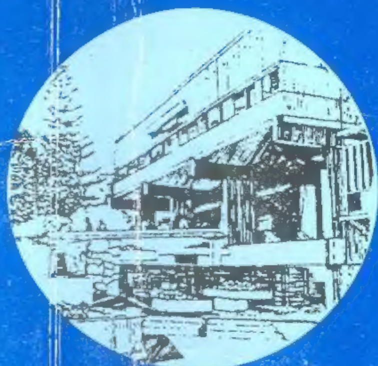
VICERRECTORIA ACADEMICA

6° CONCURSO DE CREACION INTELECTUAL

AREA DOCENCIA



EJERCICIOS RESUELTOS DE TRIGONOMETRIA Y COMPLEMENTARIOS AL TEXTO " TRIGONOMETRIA Y GEOMETRIA ANALITICA PARA LAS CARRERAS DE INGENIERIA"

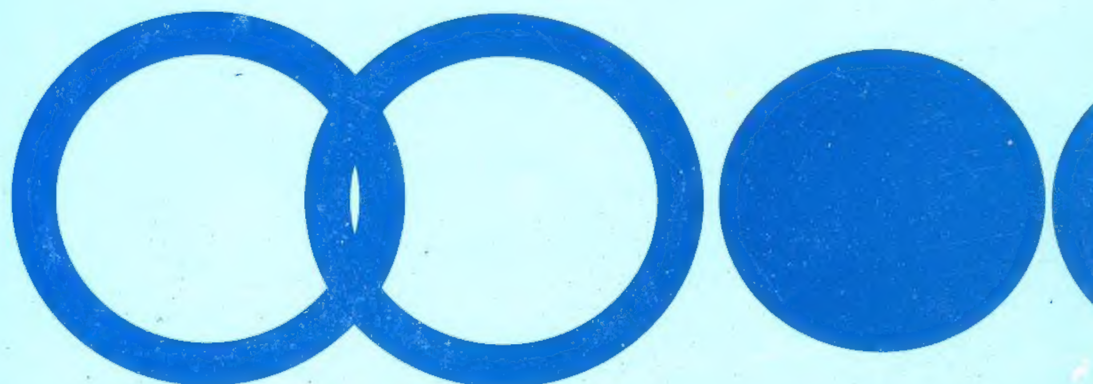


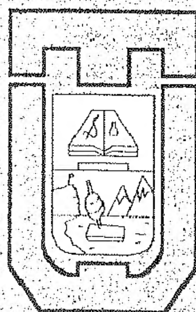
AUTORAS

VERONICA REY M.
MARLENE CISTERNAS R.

ARICA - CHILE
2005





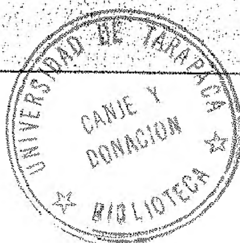


UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

EJERCICIOS RESUELTOS DE TRIGONOMETRÍA Y COMPLEMENTARIOS AL TEXTO "TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA LAS CARRERAS DE INGENIERIA"

AUTORAS: SRA. VERÓNICA REY M.
SRA. MARLENE CISTERNAS R.

ARICA – CHILE
2003



INDICE

PROLOGO

Considerando la experiencia académica que poseemos y sabiendo que el alumno, que ingresa a la Universidad, no tiene claro los conocimientos básicos de geometría y algebra como también carece de la destreza para operar con el algebra elemental, es que hemos elaborado este manual de ejercicios de trigonometría, que será de gran apoyo para el libro "Trigonometría y Geometría Analítica para las carreras de Ingeniería", elaborado entre otros, por nosotras.

A medida que el alumno vaya conociendo y entendiendo la materia, encontrará en este manual una serie de ejercicios resueltos de tal manera que visualice y capte las técnicas utilizadas.

Al término de cada capítulo, el estudiante encontrará problemas y/o ejercicios propuestos, con sus respectivas respuestas.

Creemos que si el alumno comprendió claramente la materia, logró captar las técnicas empleadas en los ejercicios resueltos, y adquirió la destreza necesaria, debería ser capaz de solucionar, sin mayor dificultad, los ejercicios propuestos.

INTRODUCCIÓN

Como alternativa a la necesidad de contar con un libro de ejercicios resueltos de Trigonometría, dirigido a los alumnos de primer año de Ingeniería y a todos aquellos interesados en dicha materia, es que hemos elaborado este libro.

En el Capítulo I, desarrollamos ejercicios y/o problemas, que involucran razones trigonométricas de ángulos agudos.

En el Capítulo II, presentamos la solución de problemas, que contemplan razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

En el Capítulo III, desarrollamos ejercicios de identidades y ecuaciones que involucran funciones trigonométricas inversas.

En el Capítulo IV, solucionamos ecuaciones trigonométricas. Para ello es necesario que el alumno tenga claro la destreza adquirida con los ejercicios correspondientes al Capítulo I y II.

GLOSARIO:

Antes de iniciar la ejercitación correspondiente, creemos conveniente tener presente algunas de las identidades trigonométricas que utilizaremos en la solución de los ejercicios y/o problemas aquí planteados:

1. $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $1 + tg^2\alpha = \sec^2\alpha$
3. $1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$
4. $sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha \cos\beta \pm sen\beta \cos\alpha$

5. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp sen\alpha\, sen\beta$

6. $tg(\alpha \pm \beta) = \dfrac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha \cdot tg\beta}$

7. $sen2\alpha = 2sen\alpha \cos\alpha$

8. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\, sen^2\alpha$

9. $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

10. $sen\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

11. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

12. $tg\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{sen\alpha}$

13. $sen\alpha + sen\beta = 2sen\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

14. $sen\alpha - sen\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\, sen\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

15. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

16. $\cos\alpha - \cos\beta = -2sen\dfrac{\alpha+\beta}{2}\, sen\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

17. $sen\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[sen(\alpha+\beta) + sen(\alpha-\beta)\right]$

18. $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

19. $sen\alpha \cdot sen\beta = \dfrac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$

La simbología utilizada en este texto es la misma que en el libro "Trigonometría y Geometría Analítica para las carreras de Ingeniería".

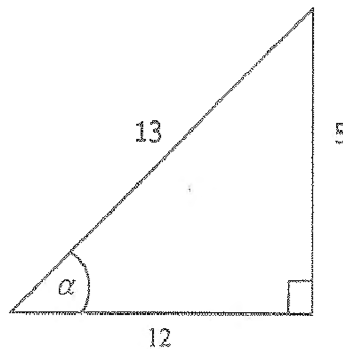
CAPITULO I

EJERCICIOS QUE INVOLUCRAN RAZONES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS AGUDOS

1. Sea $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{13}{5}$. Determinar el valor de las otras razones trigonométricas.

   Solución:

   Representamos en un triángulo rectángulo $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{13}{5}$

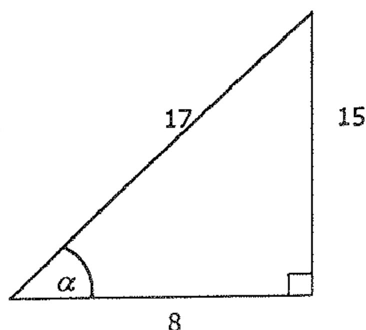


   Aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos que el cateto adyacente a α es 12.

   Luego tenemos $sen\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$, $tg\alpha = \dfrac{5}{12}$, $\sec\alpha = \dfrac{13}{12}$, $\cot g\alpha = \dfrac{12}{5}$

2. Sea $\cot g\alpha = \dfrac{8}{15}$. Determinar el valor de $\dfrac{\frac{1}{3}sen\alpha - \frac{1}{2}\cos\alpha}{\frac{1}{17}(\sec\alpha + tg\alpha)}$

   Solución: Representamos en un triángulo rectángulo $\cot g\alpha = \dfrac{8}{15}$



Aplicamos el Teorema de Pitágoras, obteniéndose el valor de la hipotenusa igual a 17. Luego :

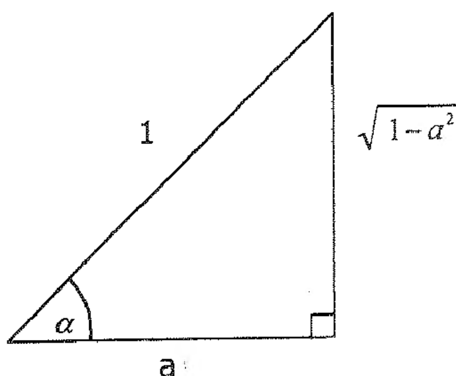
$$\frac{\frac{1}{3}sen\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha}{\frac{1}{17}(\sec\alpha+tg\alpha)}=\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{15}{17}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{8}{17}\right)}{\frac{1}{17}\left(\frac{17}{8}+\frac{15}{8}\right)}=\frac{\frac{5}{17}-\frac{4}{17}}{\frac{1}{17}\left(\frac{32}{8}\right)}=\frac{\frac{1}{17}}{\frac{4}{17}}=\frac{1}{4}$$

3. Sea $\cos\alpha=a,\ a>0$. Determinar, en función de "a", el valor de

$$\frac{sen^2\alpha+3\cos^2\alpha-1}{tg\alpha\cdot sen\alpha+\cos\alpha}$$

Solución: Representamos $\cos\alpha=a$ en un triángulo rectángulo, siendo

$$\cos\alpha=\frac{a}{1}$$



Aplicamos teorema de Pitágoras para obtener el valor del cateto opuesto a α, siendo éste igual a $\sqrt{1-a^2}$. Luego:

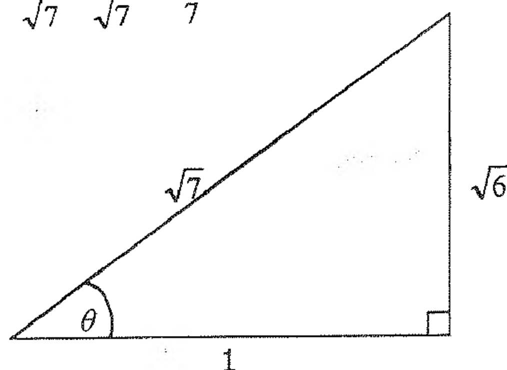
$$\frac{sen^2\alpha + 3\cos^2\alpha - 1}{tg\,\alpha \cdot sen\,\alpha + \cos\alpha} = \frac{\left(\sqrt{1-a^2}\right)^2 + 3a^2 - 1}{\frac{\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot \sqrt{1-a^2} + a} = \frac{1-a^2+3a^2-1}{\frac{1-a^2}{a} + a} = \frac{2a^2}{\frac{1-a^2+a^2}{a}} = 2a^3$$

4. Si $tg\,\theta = \dfrac{sen\frac{\pi}{4} \cdot tg\frac{\pi}{3} \cdot \sec\frac{\pi}{6}}{tg\frac{\pi}{4} \cdot \cot g\frac{\pi}{3}}$, determinar el valor de "$sen\theta \cdot \cos\theta$".

<u>Solución</u>:

$$tg\,\theta = \frac{sen\frac{\pi}{4} \cdot tg\frac{\pi}{3} \cdot \sec\frac{\pi}{6}}{\pi \qquad \pi} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}}{1}$$

Simplificamos, obteniendo que $tg\,\theta = \sqrt{6}$. Con este valor construimos el triángulo rectángulo, considerando $tg\,\theta = \frac{\sqrt{6}}{1}$, siendo "$\sqrt{6}$" el valor del cateto opuesto y "1" el valor del cateto adyacente. Luego el valor de la hipotenusa, aplicando el teorema de Pitágoras, es $\sqrt{7}$. Por lo tanto, se tiene que: $sen\,\theta \cdot \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{6}}{7}$



5. Sea ABC un triángulo rectángulo siendo:

D un punto del lado $\overline{AB}$

$\overline{AD} = c$

$\overline{BC} = a$

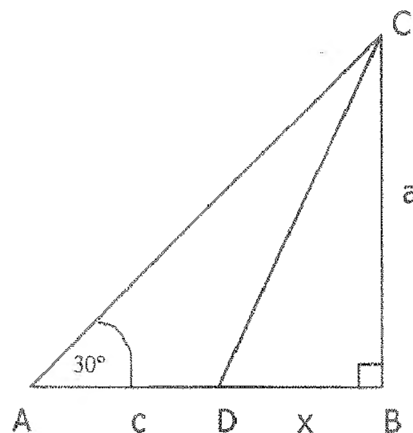
$\measuredangle\ CAB = 30^\circ$

$\measuredangle\ ABC = 90^\circ$

Determinar el valor de $\overline{DB} = x$ en función de "a" y "c".

Solución:

De acuerdo a los datos del enunciado, el gráfico del triángulo ABC es:



Considerando los valores entregados que involucran a los catetos, calcularemos $tg\ 30^\circ$.

$tg\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{c+x}$. Despejamos x, obteniendo $x = \sqrt{3}\ a - c$

6. Si $sen\alpha - \cos\alpha = 0$, determinar el valor de $\operatorname{cosec}\alpha$.

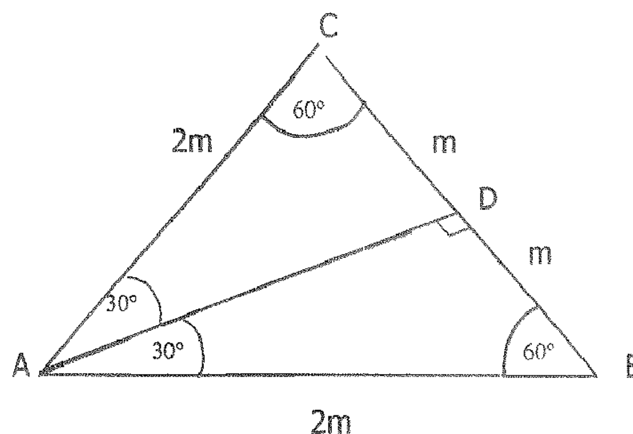
<u>Solución:</u>

Si $sen\alpha - \cos\alpha = 0$ entonces $sen\alpha = \cos\alpha$ de donde $\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = 1$, es decir

$tg\alpha = 1$. Como α es agudo, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Luego $\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

7. Sea ABC un triángulo equilátero de lado "2 m" y $\overline{AD} \perp \overline{BC}$. Determinar el valor de $\overline{AD}$. A partir de lo obtenido, demostrar que $\cos^2 60° + \cot g^2 30° = \frac{13}{4}$

<u>Solución:</u> Según el enunciado se tiene la siguiente figura:



Como el triángulo es equilátero, D es punto medio de $\overline{BC}$. Luego $\overline{BD} = \overline{DC} = m$. Además cada ángulo interior mide 60° y como $\overline{AD}$ es bisectriz del $\measuredangle BAC$, $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = 30°$

En ΔABD, $tg 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m}{AD} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3}\, m$

Con respecto a la demostración y considerando el ΔABD, tenemos:

$$\cos^2 60° + \cot g^2 30° = \left(\frac{m}{2m}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}\, m}{m}\right)^2$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2$$

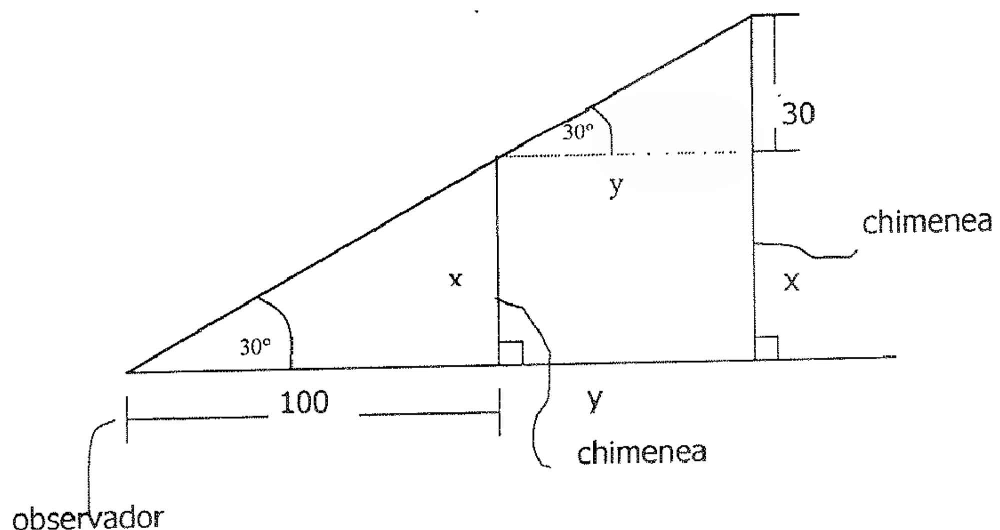
$$=\frac{1}{4}+3$$

$$=\frac{13}{4}$$

$$\therefore\ \cos^2 60°+\cot g^2 30°=\frac{13}{4}$$

8. Una chimenea tiene 30 m de altura más que otra. Un observador que está a 100 m de distancia de la más baja, observa las cúspides de ellas en una misma dirección con un ángulo de elevación de 30º. Determinar las alturas de las chimeneas y la distancia entre ellas.

<u>Solución:</u> De acuerdo al enunciado graficamos el problema.



Observamos que se forman triángulos rectángulos; de ellos obtenemos:

$$tg30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{x}{100}\Rightarrow x=\frac{100}{\sqrt{3}}=\frac{100}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{100}{3}\sqrt{3}$$

Por otro lado:

$$tg\,30°=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{30}{y}\ \Rightarrow\ \ y=30\sqrt{3}$$

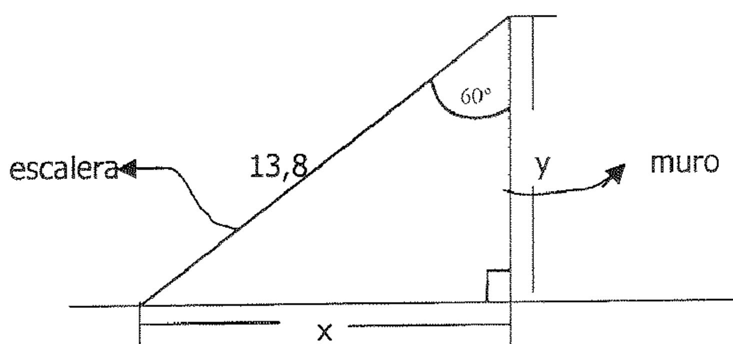
Luego, la chimenea más baja mide $\frac{100}{3}\sqrt{3}\ m$, la más alta mide $\frac{100}{3}\sqrt{3}+30\ m$ y la distancia entre ellas es de $30\sqrt{3}\ m$.

9. Una escalera de 13,8 m de longitud se apoya en un muro, formando un ángulo de 60º . Si la parte superior de la escalera coincide con la parte superior del muro, determinar la altura de éste y la distancia entre el pie de la escalera y el muro.

Solución: Gráficamente tenemos:

y = altura del muro

x = distancia pie escalera – muro



Como se forma un triángulo rectángulo, calculamos :

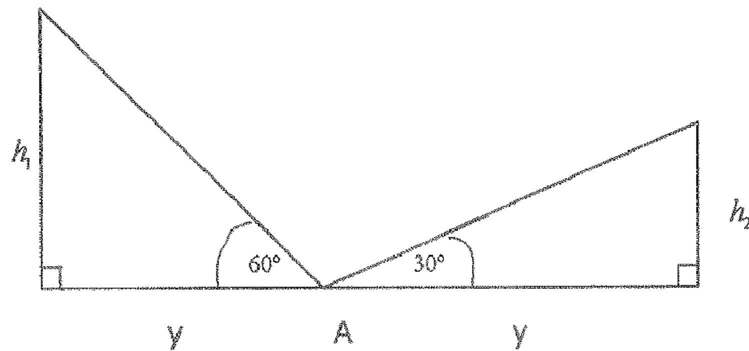
$$sen\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{13{,}8} \Rightarrow x = \frac{13{,}8}{2}\sqrt{3} = 6{,}9\sqrt{3}$$

Por otro lado: $\cos 60° = \frac{1}{2} = \frac{y}{13{,}8} \Rightarrow y = \frac{13{,}8}{2} = 6{,}9$

∴ la altura del muro es 6,9 m y la distancia del pie de la escalera al muro es de 6,9 $\sqrt{3}\ m$.

10. Desde el punto medio de la distancia entre los pies de dos torres, se observan sus extremos con un ángulo de elevación de 30º y 60º. Demostrar que la altura de una de las torres es igual al triple de la otra.

<u>Demostración:</u> Sea h_1 y h_2 las alturas de las torres y A el punto medio de la distancia entre ellas, siendo "y" la distancia desde A hasta cada uno de los pies de ellas. Luego tenemos:



$$tg\,60° = \frac{h_1}{y} \quad \Rightarrow \quad h_1 = y \cdot \sqrt{3} \quad (1)$$

$$tg\,30° = \frac{h_2}{y} \quad \Rightarrow \quad h_2 = y \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}\, h_2 \quad (2)$$

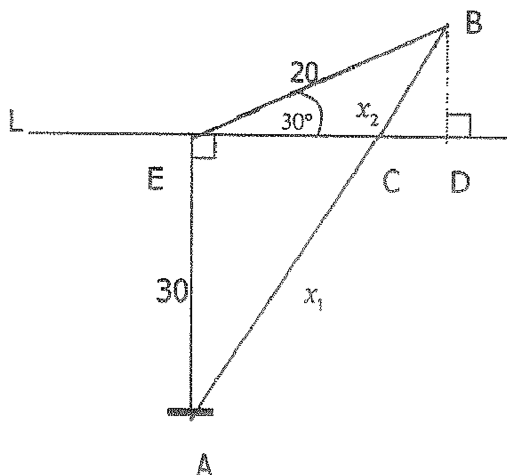
Reemplazamos (2) en (1) y obtenemos:

$$h_1 = \sqrt{3} \cdot h_2 \cdot \sqrt{3} = 3h_2$$

$\therefore$ queda demostrado.

11. Un automóvil parte de un lugar A y recorre 30 km en dirección norte. Luego se dirige a un lugar B situado en la dirección noreste, recorriendo 20 km y formando un ángulo de inclinación de 30º. ¿Qué distancia hay entre A y B?

<u>Solución</u>: Gráficamente tenemos:



Sea $\overline{AC} = x_1$ y $\overline{CB} = x_2$

Como $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, determinaremos x_1 y x_2

Sea $\overline{BD} \perp$ L

En $\Delta\, EDB,\ sen 30° = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BD}}{20} \Rightarrow \overline{BD} = 10$

Además, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{ED}}{20} \Rightarrow \overline{ED} = 10\sqrt{3}$

Con este valor diremos que $\overline{EC} = z$, luego $\overline{CD} = 10\sqrt{3} - z$.

Sea $\alpha = \measuredangle DCB = \measuredangle ECA$

Con respecto al $\Delta\, CDB$, tenemos $tg\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{10}{10\sqrt{3} - z}$ (1)

Y con respecto al ΔECA, tenemos $tg\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{30}{z}$ (2)

Igualando (1) y (2) obtenemos:

$$\frac{10}{10\sqrt{3} - z} = \frac{30}{z} \Rightarrow 4z = 30\sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{15}{2}\sqrt{3}$$

Luego, $\overline{EC} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$ y $\overline{CD} = 10\sqrt{3} - \frac{15}{2}\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el $\Delta\, AEC$ y $\Delta\, BCD$:

$$x_1^2 = 30^2 + z^2 = 900 + \left(\frac{15\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 900 + \frac{675}{4} = 25 \cdot 9\left(4 + \frac{3}{4}\right) = 25 \cdot 9 \cdot \frac{19}{4}$$

$$\therefore x_1 = \sqrt{\frac{25 \cdot 9 \cdot 19}{4}} = \frac{5 \cdot 3}{2}\sqrt{19} = \frac{15}{2}\sqrt{19}$$

$$x_2^2 = \overline{CD}^2 + \overline{BD}^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 100 = \frac{75}{4} + 100 = 25\left(\frac{3}{4} + 4\right) = \frac{25 \cdot 19}{4}$$

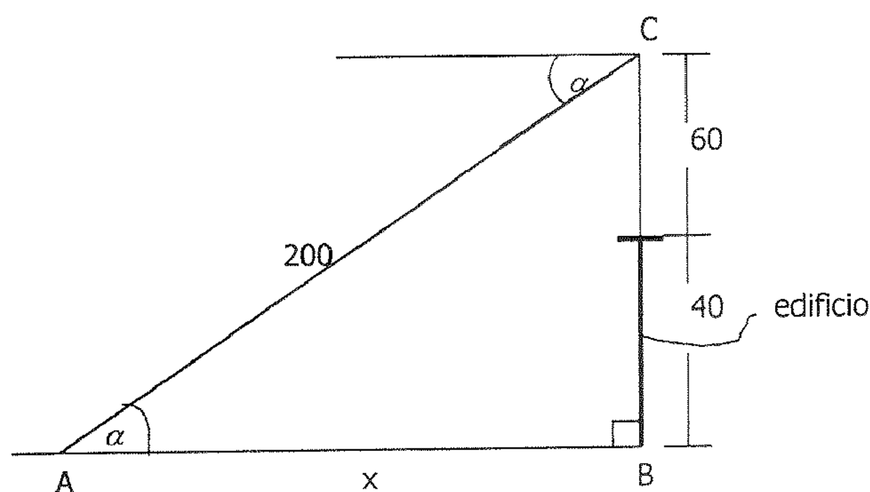
$$\therefore x_2 = \sqrt{\frac{25 \cdot 19}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{19}$$

Finalmente tenemos:

$$\overline{AB} = x_1 + x_2 = \frac{15}{2}\sqrt{19} + \frac{5}{2}\sqrt{19} = 10\sqrt{19}\ km.$$

12. Un avión que pasa 60 m sobre la azotea de un edificio de 40m de altura, desciende 200 m hasta tocar tierra en un lugar A. ¿Con qué ángulo descendió? ¿Qué distancia hay entre la base del edificio y el lugar A?

<u>Solución:</u> Gráficamente tenemos:



Siendo : α = ángulo de descenso (depresión)

$\overline{AB}$ = distancia entre el lugar A y el edificio.

Como $\alpha = \measuredangle A$, en $\Delta\ ABC$ tenemos:

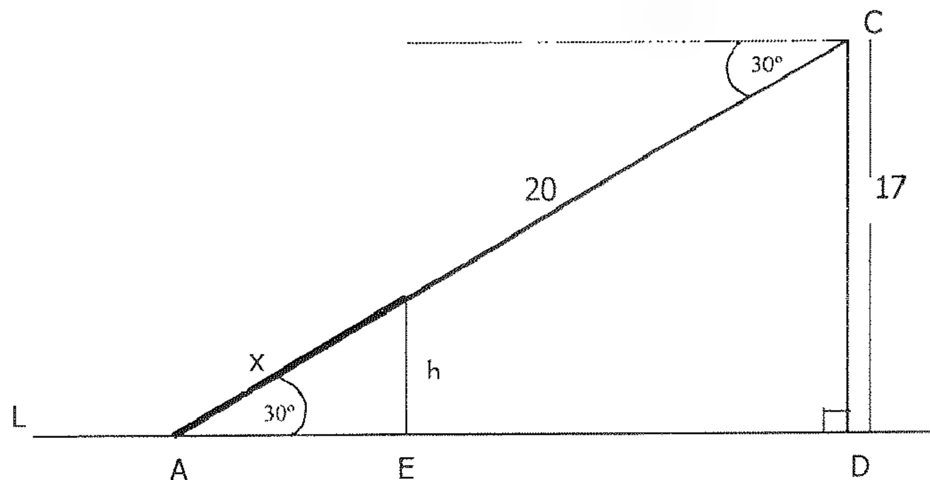
$$sen\,\alpha = \frac{40+60'}{200} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Además $tg\,30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{100}{x} \Rightarrow x = 100\sqrt{3}$

∴ El avión descendió con un ángulo de 30° y la distancia entre el lugar A y el edificio es de $100\sqrt{3}\ m$.

13. Desde la azotea de un edificio de 17 m de altura, se observa la parte superior de un semáforo con un ángulo de depresión de 30°. Si la distancia entre la azotea del edificio y la parte superior del semáforo es de 20 m, calcular la altura del semáforo.

Solución: Gráficamente tenemos:



C= azotea edificio

B= parte superior semáforo

A= punto de intersección entre la prolongación de $\overline{CB}$ y la horizontal L.

Por geometría tenemos que $\angle\ A = 30°$.

Luego en $\Delta\ AEB$, $sen\,30° = \frac{1}{2} = \frac{h}{x} \Rightarrow x = 2h \Rightarrow h = \frac{x}{2}$ (1)

Y en $\Delta\ ADC$, $sen\,30° = \frac{1}{2} = \frac{17}{20+x} \Rightarrow x = 14$ (2)

Reemplazando (2) en (1), obtenemos: $h = \frac{14}{2} = 7$

Luego la altura del semáforo es de 7m.

14. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas, siendo "x" ángulo agudo.

a. $4\cos^2 x \cdot \cot g\,x = 3\cot g\,x$

Solución:

$4\cos^2 x \cdot \cot g\,x - 3\cot g\,x = 0$

$\cot g\,x\,(4\cos^2 x - 3) = 0$

$\therefore\ \cot g\,x = 0 \Rightarrow x$ no es ángulo agudo ó

$4\cos^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 30°$ ó $\frac{\pi}{6}$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x$ no es ángulo agudo.

Luego el ángulo pedido es $x = 30°$.

b. $\sqrt{3}\ tg^2x - 2tgx = \sqrt{3}$

Solución:

$\sqrt{3}\ tg^2x - 2tgx - \sqrt{3} = 0$

Factorizando, nos queda: $\left(\sqrt{3}\,tg\,x + 1\right)\left(tg\,x - \sqrt{3}\right) = 0$

$\therefore\ \sqrt{3}\,tg\,x + 1 = 0 \Rightarrow tg\,x = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x$ no es agudo

$tg\,x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow tg\,x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60°$

Luego el ángulo pedido es $x = 60°$

c. $3\,tg\,x = 2\cos x$

Solución:

$3\,tg\,x = 2\cos x$, $\quad 3\dfrac{sen\,x}{\cos x} = 2\cos x$, $\quad 3\,sen\,x = 2\cos^2 x$, $\quad \cos x \neq 0$

$3\,sen\,x = 2\left(1 - sen^2 x\right) \Rightarrow 2\,sen^2\,x + 3\,sen\,x - 2 = 0$

Factorizando, nos queda:

$(2sen\,x - 1)(sen\,x + 2) = 0$

$\therefore\; 2sen\,x - 1 = 0 \Rightarrow sen\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$

$sen\,x + 2 = 0 \Rightarrow sen\,x = -2 < -1 \Rightarrow$ no hay solución

Luego el ángulo pedido es $x = 30°$

d. $\cos(90° - x) + \cos ec\; x = \dfrac{5}{2}$. Calcular el valor de $tgx + \sec x$

Solución:

$\cos(90° - x) + \cos ec\; x - \dfrac{5}{2} = 0,$

$sen\,x + \dfrac{1}{sen\,x} - \dfrac{5}{2} = 0,$ sacamos común denominador

$\dfrac{2sen^2 x + 2 - 5\,sen\,x}{2\,sen\,x} = 0$, de donde $2sen^2\,x - 5\,sen\,x + 2 = 0$, siendo $sen\,x \neq 0$

Factorizamos: $(2sen\,x - 1)(sen\,x - 2) = 0$

Luego: $2\,sen\,x - 1 = 0 \Rightarrow sen\,x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 30°$

$sen\,x - 2 = 0 \Rightarrow sen\,x = 2 > 1 \Rightarrow$ no hay solución

A continuación calcularemos el valor de $tg\,x + \sec x$, sabiendo que $x = 30°$:

$$tg\,30° + \sec 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

15. Demostrar:

a. $\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = 2\,cosec^2\,\alpha$

<u>Demostración:</u> Si observamos la identidad es preferible iniciar la demostración desde la expresión izquierda del signo =. Por lo tanto:

$$\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha+1-\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \frac{2}{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{sen^2\alpha} = 2\,cosec^2\,\alpha$$

Luego, aplicando identidades trigonométricas básicas, hemos demostrado que

$$\frac{1}{1-\cos\alpha} + \frac{1}{1+\cos\alpha} = 2\,cosec^2\,\alpha$$

b. $cosec\,\alpha\,\sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = tg\,\alpha$

<u>Demostración:</u> Análogamente a la demostración anterior, tenemos:

$$cosec\,\alpha \cdot \sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = \frac{1}{sen\,\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha}$$

$$= \frac{1-\cos^2\alpha}{sen\,\alpha\,\cos\alpha}$$

$$= \frac{sen^2\alpha}{sen\,\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$$

$$\therefore cosec\,\alpha\cdot\sec\alpha - \frac{\cos\alpha}{sen\,\alpha} = tg\,\alpha$$

c. $\frac{2\,sen\,\theta\,\cos\theta - \cos\theta}{1 - sen\,\theta + sen^2\theta - \cos^2\theta} = \cot g\,\theta$

Demostración: tenemos:

$$\frac{2sen\theta \cdot \cos\theta - \cos\theta}{1 - sen\theta + sen^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{2sen\theta\,\cos\theta - \cos\theta}{(1-\cos^2\theta) - sen\,\theta + sen^2\theta} =$$

$$= \frac{2\,sen\theta\,\cos\theta - \cos\theta}{sen^2\theta - sen\,\theta + sen^2\theta} = \frac{\cos\theta\,(2sen\theta - 1)}{sen\,\theta(2\,sen\theta - 1)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{sen\theta} = \cot g\,\theta.$$

d. $sen^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot sen^2\beta = sen^2\alpha - sen^2\beta$

Demostración: tenemos:

$$sen^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot sen^2\beta = sen^2\alpha(1 - sen^2\beta) - (1 - sen^2\alpha)sen^2\beta =$$

$$sen^2\alpha - sen^2\alpha \cdot sen^2\beta - sen^2\beta + sen^2\alpha \cdot sen^2\beta = sen^2\alpha - sen^2\beta$$

$$\therefore\ sen^2\alpha \cdot \cos^2\beta - \cos^2\alpha \cdot sen^2\beta = sen^2\alpha - sen^2\beta$$

e. $\dfrac{sen^6\alpha - \cos^6\alpha}{2\,sen^2\alpha - 1} = 1 - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

Demostración: tenemos:

$$\frac{sen^6\alpha - \cos^6\alpha}{2sen^2\alpha - 1} = \frac{(sen^3\alpha)^2 - (\cos^3\alpha)^2}{2sen^2\alpha - 1} = \frac{(sen^3\alpha - \cos^3\alpha)(sen^3\alpha + \cos^3\alpha)}{2sen^2\alpha - 1} =$$

factorizamos la diferencia y suma de cubos

$$= \frac{(sen\alpha - \cos\alpha)(sen^2\alpha + sen\alpha\,\cos\alpha + \cos^2\alpha)(sen\alpha + \cos\alpha)(sen^2\alpha - sen\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{2sen^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{(sen\alpha - \cos\alpha)\ (1 + sen\alpha\cos\alpha)\ (sen\alpha + \cos\alpha)(1 - sen\alpha\cos\alpha)}{2\ sen^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{[(sen\alpha - \cos\alpha)\ (sen\alpha + \cos\alpha)\ ][\ (1 + sen\alpha\cos\alpha)\ (1 - sen\alpha\ \cos\alpha)\ ]}{2\,sen^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{(\ sen^2\alpha - \cos^2\alpha)(1 - sen^2\alpha\cos^2\alpha)}{2\,sen^2\alpha - 1} = \frac{[\ sen^2\alpha - (1 - sen^2\alpha)](1 - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha)}{2\,sen^2\alpha - 1}$$

$$= \frac{(2\,sen^2\alpha - 1)(1 - sen^2\alpha\ \cos^2\alpha)}{2\ sen^2\alpha - 1}$$

$$= 1 - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

$$\therefore\ \frac{sen^6\alpha - \cos^6\alpha}{2\,sen^2\alpha - 1} = 1 - sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha.$$

f. $\dfrac{tg\,\beta + \sec^3\beta - \sec\beta}{\sec\beta} = tg^2\beta + sen\,\beta.$

Demostración: tenemos:

$$\frac{tg\,\beta + \sec^3\beta - \sec\beta}{\sec\beta} = \frac{tg\beta}{\sec\beta} + \frac{\sec^3\beta}{\sec\beta} - \frac{\sec\beta}{\sec\beta}$$

$$= sen\,\beta + (\sec^2\beta - 1) = sen\,\beta + tg^2\beta$$

En general, una identidad trigonométrica puede demostrarse utilizando distintas formas; como ejemplo, en el ejercicio anterior hacemos:

$$\frac{tg\beta + \sec^3\beta - \sec\beta}{\sec\beta} = \frac{\dfrac{sen\beta}{\cos\beta} + \dfrac{1}{\cos^3\beta} - \dfrac{1}{\cos\beta}}{\dfrac{1}{\cos\beta}} =$$

$$= \frac{\dfrac{sen\beta\cos^2\beta + (1 - \cos^2\beta)}{\cos^3\beta}}{\dfrac{1}{\cos\beta}} = \frac{sen\,\beta\ \cos^2\beta + sen^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$= \frac{sen\,\beta\,\cos^2\beta}{\cos^2\beta} + \frac{sen^2\beta}{\cos^2\beta} =$$

$$= sen\,\beta + tg^2\beta.$$

g. $\left(1 - sen\,\alpha + \cos\alpha\right)^2 = 2\left(1 - sen\,\alpha\right)\left(1 + \cos\alpha\right).$

Demostración: La iniciaremos elevando al cuadrado el trinomio:

$$\left(1 - sen\,\alpha + \cos\alpha\right)^2 = 1 + \left(sen^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2sen\,\alpha + 2\cos\alpha - 2sen\,\alpha\,\cos\alpha$$

$$= \left(2 - 2sen\,\alpha\right) + \left(2\cos\alpha - 2\,sen\,\alpha\,\cos\alpha\right)$$

$$= 2\left(1 - sen\,\alpha\right) + 2\cos\alpha\left(1 - sen\,\alpha\right)$$

$$= \left(1 - sen\,\alpha\right)\left(2 + 2\cos\alpha\right)$$

$$= 2\left(1 - sen\,\alpha\right)\left(1 + \cos\alpha\right)$$

$$\therefore \left(1 - sen\,\alpha + \cos\alpha\right)^2 = 2\left(1 - sen\,\alpha\right)\left(1 + \cos\alpha\right).$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Determinar el valor de:

a. $\dfrac{tg^2 60^\circ + 2\, tg^2 45^\circ}{2 sen 30^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cot g 60^\circ}$ Resp.: 10

b. $\dfrac{2 \operatorname{cosec}^2 45^\circ - 3 \sec^2 30^\circ}{1 + tg^2\, 60^\circ}$ Resp.: 0

c. $\cot g \dfrac{\pi}{3} \cdot tg \dfrac{\pi}{6} + \sec^2 \dfrac{\pi}{4}$ Resp.: $\dfrac{7}{3}$

d. $2\, sen \dfrac{\pi}{3} \cdot \sec^2 \dfrac{\pi}{3} \cdot \cos^2 \dfrac{\pi}{3}$ Resp.: $\sqrt{3}$

2.- Si $\sec \alpha = \dfrac{13}{5}$, determinar el valor de :

$$A = \frac{2 sen \alpha - 3 \cos \alpha}{4\, sen \alpha - 9 \cos \alpha}$$ Resp.: 3

3.- Si $tg \alpha = \dfrac{2pq}{p^2 - q^2}$, demostrar que : $\left(p^4 - q^4\right) \cot g \alpha \cdot sen \alpha = \left(p^2 - q^2\right)^2$

4.- Si $sen 2\alpha = \cos \alpha$, siendo 2α agudo, determinar α. Resp.: 30º

5.- Sobre un peñasco situado en la ribera de un río se levanta una torre de 125 m de altura. Desde el extremo superior de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta, es de 30º y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto, es de 15º. Determinar el ancho del río y la altura del peñasco.

Resp.: $\dfrac{125\left(2\sqrt{3} + 3\right)}{2}\, m$; $\dfrac{125\sqrt{3}}{2}\, m$

6.- Una chimenea tiene 30 m, de altura más que otra. Un observador que está a 100 m de distancia de la más baja, observa que sus cúspides están en una

recta inclinada respecto al horizonte formando un ángulo de 30º. Determinar sus alturas.

Resp.: $\frac{100\sqrt{3}}{3}m$; $\frac{10}{3}\left(10\sqrt{3}+9\right)m$

7.- Desde el pie de un edificio se observa la parte superior de una torre con un ángulo de elevación de 45º. Desde la azotea del mismo edificio se observa la cúspide de la torre con un ángulo de depresión de 60º. El edificio es 20 m más alto que la torre. Determinar ambas alturas.

Resp.: $\frac{20\sqrt{3}}{3}m$; $\frac{20}{3}\left(\sqrt{3}+3\right)m$

8.- En una avenida una persona A visualiza, en la dirección norte, la parte superior de dos edificios, con un ángulo de elevación de 30º. La altura de uno de ellos es el doble de la del otro. Otra persona B, situada en la parte superior del edificio más bajo, visualiza la parte superior de una antena situada en la azotea del otro edificio, con un ángulo de elevación de 45º. Determinar la altura de la antena, si la distancia entre A y el edificio más bajo es de 50 m.

Resp.: $\frac{50}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)m$

9.- Si $tg\,\alpha+\sec\alpha=2$, demostrar que $sen\,\alpha=\frac{3}{5}$

10.- Demostrar que: $\dfrac{\cot g\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sec\alpha\ \ \cot g^3\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha\cdot sen^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\sqrt{tg^2\alpha+1}$

11.- Demostrar:

a. $sen\left(90°-\alpha\right)\cdot\cot g\left(90°-\alpha\right)=sen\,\alpha$

b. $\dfrac{sen\theta \cdot \cos\theta}{\cos^2\theta - sen^2\theta} = \dfrac{tg\,\theta}{1 - tg^2\theta}$

c. $(\cot g\,\theta - 3)(3\cot g\,\theta - 1) = 3\ cosec^2\theta - 10\cot g\,\theta$.

d. $sen^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1 - \dfrac{1}{cosec^2\alpha}$

e. $\sqrt{2}\ sen\theta = sen\alpha - \cos\alpha$, si $tg\theta = \dfrac{sen\alpha - \cos\alpha}{sen\alpha + \cos\alpha}$

f. $(tg\,\beta + \sec\beta \cdot tg^2\beta)\cos\beta = \sec^2\beta - 1 + sen\,\beta$

g. $\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha} - \dfrac{cosec\,\alpha - \cot g\,\alpha}{cosec\,\alpha + \cot g\,\alpha} = 4\ \cot g\,\alpha \cdot cosec\,\alpha$

h. $\cos^4\alpha - \cos^2\alpha \cdot sen^2\alpha - 2sen^4\alpha = \cos^2\alpha - 2\ sen^2\alpha$

i. $\dfrac{2\ sen\gamma \cdot \cos\gamma\ (1 + sen\gamma) + \cos^3\gamma}{1 + sen\gamma} = \dfrac{1 + sen\gamma}{\sec\gamma}$

j. $\dfrac{sen^2 n\,\alpha}{sen^2\alpha} = \dfrac{n^2}{1 + (n^2 - 1) \cdot sen^2\alpha}$, si $n\,tg\,\alpha = tg(n\,\alpha)$, $n \in R$

k. $\dfrac{\cos\alpha}{1 - sen\,\alpha} = \sec\alpha + tg\,\alpha$

l. $\sec^2\alpha + cosec^2\alpha = \sec^2\alpha \cdot cosec^2\alpha$

CAPITULO II

EJERCICIOS QUE INVOLUCRAN RAZONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO CUALQUIERA.

1. Determinar el valor de A, siendo:

$$A = \frac{1-\cos^2 210^\circ}{sen 330^\circ + sen 450^\circ} + \frac{tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot \cot g \frac{7\pi}{4}}{\cos ec^2(-300^\circ)}$$

Solución: Observando la expresión, expresaremos los ángulos de las razones que correspondan, como la suma o diferencia de un ángulo cuadrangular y un agudo. Además, transformaremos las razones trigonométricas de un ángulo negativo a una de ángulo positivo. Es decir:

$$A = \frac{1-\cos^2(180^\circ+30^\circ)}{sen(360^\circ-30^\circ)+sen(360^\circ+90^\circ)} + \frac{-tg\frac{\pi}{4}\cdot \cot g \frac{7\pi}{4}}{(-\cos ec\ 300^\circ)^2}$$

$$= \frac{1-(-\cos 30^\circ)^2}{sen(-30^\circ)+sen\ 90^\circ} - \frac{tg\frac{\pi}{4}\cdot \cot g\frac{7\pi}{4}}{\cos ec^2\ (360^\circ-60^\circ)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 30^\circ}{-sen 30^\circ + sen 90^\circ} - \frac{tg\frac{\pi}{4}\cdot \cot g\frac{7\pi}{4}}{\cos ec^2\ (-60^\circ)}$$

Como $\cos ec^2\ (-60^\circ) = (-\cos ec 60^\circ)^2 = \cos ec^2\ 60^\circ$

$$= \frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1\cdot(-1)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

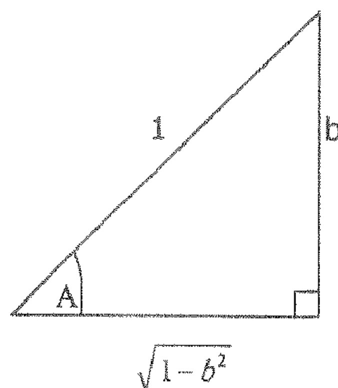
$$= \frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \quad A = \frac{5}{4}.$$

2. Si $sen\ A = b, \quad 0 \leq A \leq 90°$, determinar el valor de:

$$\frac{sen\left(\frac{3\pi}{2} - A\right) + tg(\pi - A)}{\cot g\left(\frac{\pi}{2} + A\right) - \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + A\right)}$$ en función de b.

Solución: Como $sen\ A = b$ y $A \in \left[\ 0, \frac{\pi}{2}\right]$ tenemos



Luego:

$$\frac{sen\left(\frac{3\pi}{2}-A\right)+tg(\pi-A)}{\cot g\left(\frac{\pi}{2}+A\right)-\cos ec\left(\frac{3\pi}{2}+A\right)}=\frac{-\cos A-tg\,A}{-tg\,A-(-\sec A)}$$

$$=\frac{\cos A+tg\,A}{tg\,A-\sec A}=\frac{\sqrt{1-b^2}+\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}}{\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}}=\frac{1-b^2+b}{b\quad 1}$$

3. Demostrar que: $sen125°-\cos 25°=-sen5°$

Demostración:

$sen125°-\cos 25°=sen(120°+5°)\quad\cos(30°\quad 5°)$

$=(sen\,120°\cdot\cos 5°+sen5°\cdot\cos 120°)-(\cos 30°\cdot\cos 5°+sen30°\cdot sen5°)$

$=sen(180°-60°)\cdot\cos 5°+sen5°\cdot\cos(180°-60°)-\cos 30°\cdot\cos 5°-sen30°\cdot sen5°$

$=sen60°\cdot\cos 5°+sen5°(-\cos 60°)-\cos 30°\cdot\cos 5°-sen30°\cdot sen5°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5°-sen5°\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 5°-\frac{1}{2}sen5°$

$=-sen5°$

$\therefore sen\,125°-\cos 25°=-sen5°$

4. Si $sen28°=a$, verificar que:

$$\frac{\cos 208°\cdot tg152°+sen298°-a}{tg\,242°\cdot\cos 118°+\sqrt{1-a^2}\sec^2(-28°)}=\frac{a^2\quad 1}{a^2}$$

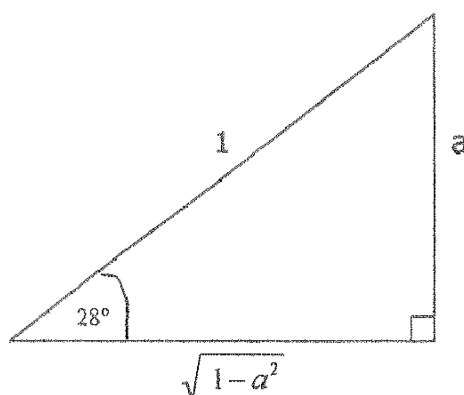
Solución:

$$\frac{\cos 208°\cdot tg152°+sen298°-a}{tg\,242°\cdot\cos 118°+\sqrt{1-a^2}\sec^2(-28°)}=\frac{\cos(180°+28°)\cdot tg(180°-28°)+sen(270°+28°)-a}{tg(270°-28°)\cdot\cos(90°+28°)+\sqrt{1\quad a^2}\cdot\sec^2 28°}=$$

$$= \frac{-\cos 28^\circ \cdot \left(-tg\, 28^\circ\right) + \left(-\cos 28^\circ\right) - a}{\cot g\, 28^\circ \left(-sen\, 28^\circ\right) + \sqrt{1-a^2} \cdot \sec^2 28^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 28^\circ \cdot tg\, 28^\circ - \cos 28^\circ - a}{-\cot g\, 28^\circ \cdot sen\, 28^\circ + \sqrt{1-a^2} \cdot \sec^2 28^\circ} =$$

Pero como $sen\, 28^\circ = a$, tenemos:



Luego:

$$= \frac{\sqrt{1-a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} - \sqrt{1-a^2} - a}{\frac{-\sqrt{1-a^2}}{a} \cdot a + \sqrt{1-a^2} \cdot \frac{1}{1-a^2}} = \frac{-\sqrt{1-a^2}}{-\sqrt{1-a^2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a^2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{1-a^2}}{\frac{\sqrt{1-a^2}\left(1-1+a^2\right)}{1-a^2}} = \frac{-\left(1-a^2\right)}{a^2} = \frac{a^2-1}{a^2}.$$

5. Si $sen\,\alpha = \frac{24}{25}$, determinar el valor de:

$$A = \frac{sen\left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos^2(2\pi - \alpha) \cdot tg\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)}{\cot g^2(\pi + \alpha) \cdot sen\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

Solución:

$$A=\frac{-sen\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos^2(-\alpha)\cdot tg\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cot g^2(\pi+\alpha)\cdot sen\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{-(-\cos\alpha)\cdot\cos^2\alpha\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cot g^2\alpha\cdot sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

$$=\frac{\cos\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot(-\cot g\alpha)}{\cot g^2\alpha\cdot\cos\alpha}$$

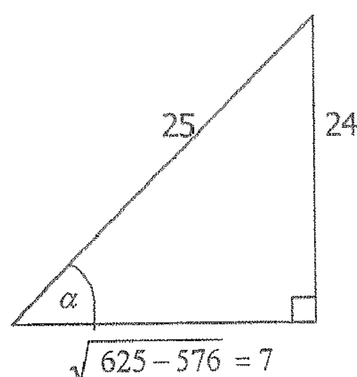
$$=-\frac{\cos^2\alpha}{\cot g\alpha}.$$

Aquí ya podríamos evaluar sabiendo que $sen\alpha=\frac{24}{25}$ o seguir reduciendo la expresión obtenida. Si hacemos esto último, tenemos:

$$=-\frac{\cos^2\alpha}{\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}}=sen\alpha\cdot\cos\alpha$$

Como $sen\alpha=\frac{24}{25}>0\Rightarrow\alpha\in I.C.\ ó\ II.C.$

Además:



$\therefore$ Si $\alpha\in I.C.,\qquad A=\frac{24}{25}\cdot\frac{7}{25}=\frac{168}{625}$

Si $\alpha \in II.C.,\qquad A = \dfrac{24}{25} \cdot \dfrac{-7}{25} = \dfrac{-168}{625}$

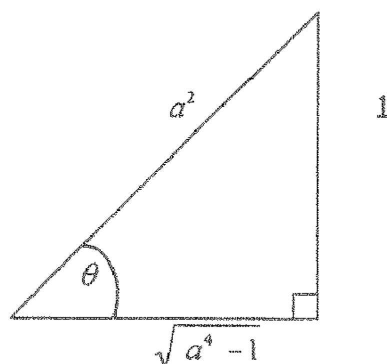
6. Si $\operatorname{cosec}\theta = -a^2$, determinar el valor de:

$$A = \frac{\sec\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot sen\left(\dfrac{7\pi}{2} - \theta\right)}{tg(\theta + \pi) \cdot \operatorname{cosec}(2\pi - \theta)}$$

<u>Solución:</u> Como $sen\left(\dfrac{7\pi}{2} - \theta\right) = sen\left(2\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \theta\right) = sen\left(\dfrac{3\pi}{2} - \theta\right)$

$$A = \frac{(-\operatorname{cosec}\theta) \cdot (-\cos\theta)}{tg\,\theta \cdot (-\operatorname{cosec}\theta)} = -\frac{\cos\theta}{\dfrac{sen\theta}{\cos\theta}} = -\frac{\cos^2\theta}{sen\theta}$$

Pero:



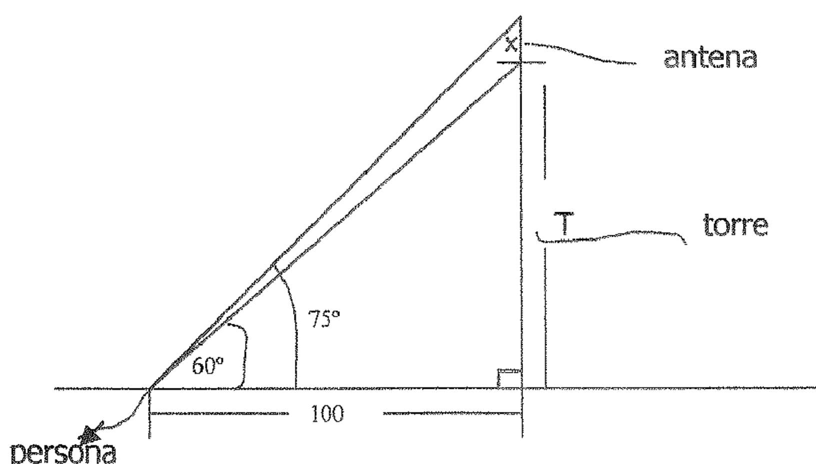
Como $\operatorname{cosec}\theta = -a^2 < 0$ y $\cos^2\theta > 0$ no es necesario hacer el análisis para el III C. y IV C.

Luego:

$$A = -\frac{\cos^2\theta}{sen\theta} = -\frac{\dfrac{a^4 - 1}{a^4}}{-\dfrac{1}{a^2}} = \frac{a^4 - 1}{a^2}$$

7. Una persona que está situada en una calle a 100 m de una torre visualiza la parte superior de ella con un ángulo de elevación de 60°. Sobre la parte superior de la torre hay una antena que la persona la observa con un ángulo de elevación de 75°. Determinar la altura de la antena.

Solución: Gráficamente tenemos:



Considerando los datos entregados y el gráfico obtenido, tenemos:

$tg\ 60° = \frac{T}{100} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{T}{100} \Rightarrow T = 100\sqrt{3}$ (1)

$tg75° = \frac{T+x}{100}$. Pero $tg\,75° = tg(30°+45°) = \frac{tg30° + tg45°}{1 - tg30° \cdot tg45°}$

$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$. Racionalizando obtenemos que : $tg\,75° = 2 + \sqrt{3}$

Luego $2 + \sqrt{3} = \frac{T+x}{100} \Rightarrow x = 100\left(2 + \sqrt{3}\right) - T$

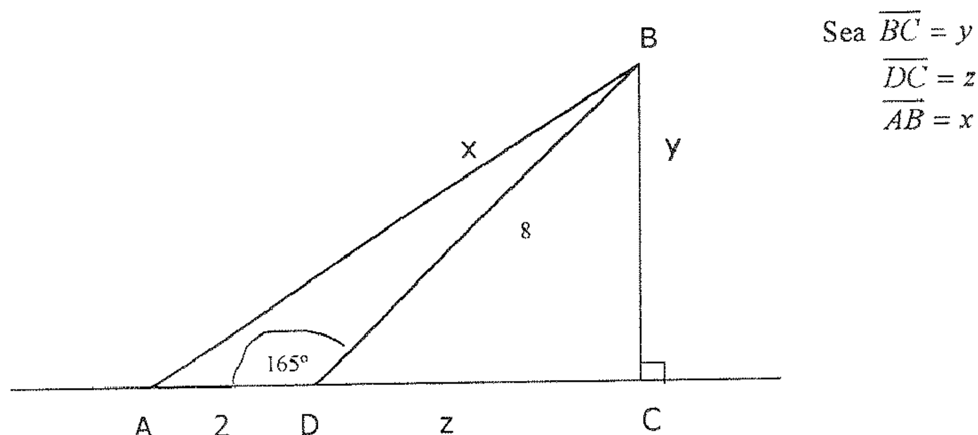
Según (1) : $x = 200 + 100\sqrt{3} - 100\sqrt{3}$

$x = 200\ m$

Luego la altura de la antena es de 200 m.

8. En una avenida se encuentra un poste BC. Hacia un mismo lado de él se han colocado dos cables de tensión del poste, siendo ellos AB y DB. Si $\measuredangle ADB = 165°$, $\overline{DB} = 8m$ y $\overline{AD} = 2m$, ¿cuál es la longitud del cable $\overline{AB}$?

Solución: Gráficamente tenemos:



Sea $\overline{BC} = y$

$\overline{DC} = z$

$\overline{AB} = x$

Del gráfico $\measuredangle CDB = 15°$. ¿ Cómo obtenemos el valor de las razones trigonométricas de 15º ?. Escogemos una de ellas, como por ejemplo $sen\,15°$, sabiendo que:

$$sen\,15° = sen(45°-30°) = sen\,45°\cos 30° - sen\,30°\cos 45° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Luego:

Como conocemos el valor de $\overline{DB}$ y $\overline{DC}$, aplicamos teorema de Pitágoras en el $\Delta\,BCD$, siendo:

$$z = \sqrt{64 - 4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{64 - 24 + 16\sqrt{3} - 8} = \sqrt{32 + 16\sqrt{3}} = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Aplicamos nuevamente el teorema de Pitágoras al $\Delta\,ABC$, siendo:

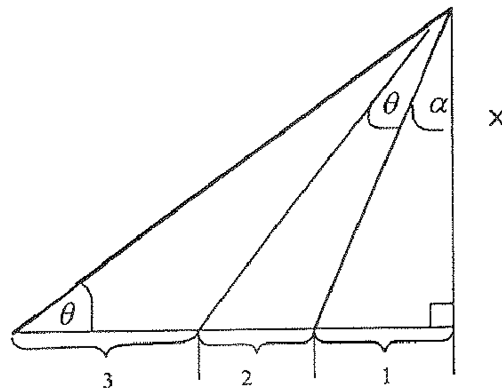
$$x = \sqrt{\left(2 + 4\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 + 4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{1 + 4\sqrt{2+\sqrt{3}} + 4\left(2+\sqrt{3}\right) + 6 - 2\sqrt{12} + 2}$$

$$= 2\sqrt{4\sqrt{2+\sqrt{3}}+1.7}$$

$\therefore$ la longitud del cable $\overline{AB}$ es $2\sqrt{4\sqrt{2+\sqrt{3}}+17}$.

9. Considerando la figura dada, determinar el valor de $tg\,\theta$.



<u>Solución:</u> De acuerdo al gráfico dado, tenemos que:

$$tg\theta = \frac{x}{6},\ tg(\theta+\alpha) = \frac{3}{x},\ tg\,\alpha = \frac{1}{x}$$

$$\therefore tg(\theta+\alpha) = \frac{tg\,\theta + tg\,\alpha}{1 - tg\,\theta\ tg\,\alpha} = \frac{\frac{x}{6}+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{x}} =>$$

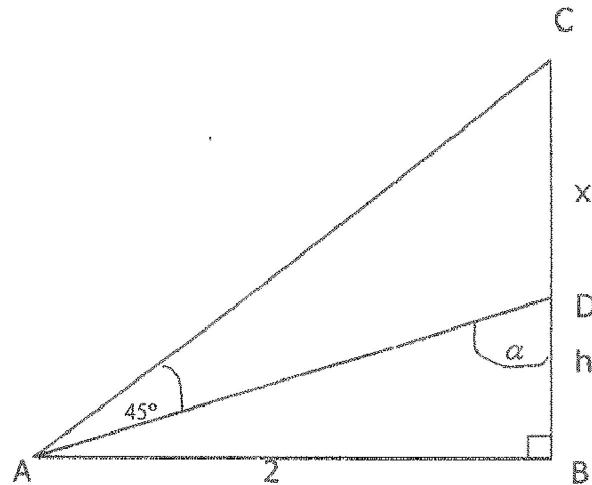
$$\frac{3}{x} = \frac{\frac{x^2+6}{6x}}{\frac{5x}{6x}} = \frac{x^2+6}{5x} \Rightarrow 15 = x^2+6$$

$$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \quad x = 3$$

$$\therefore\ tg\,\theta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

93889

10. Considerando la figura dada, determinar el valor de x en función de h.



Solución: En $\Delta\, ABD$, $\measuredangle\, BAD = 90° - \alpha$

$$\therefore\ tg\,(90° - \alpha) = \frac{h}{2} \Rightarrow \cot g\,\alpha = \frac{h}{2} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{2}{h} \qquad (1)$$

Por otro lado:

$$tg\left[\,45° + (90° - \alpha)\,\right] = \frac{x+h}{2} \Rightarrow tg\left(135° - \alpha\right) = \frac{x+h}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{tg\,135° - tg\,\alpha}{1 + tg\,135° \cdot tg\,\alpha} = \frac{x+h}{2} \Rightarrow \frac{-1 - tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha} = \frac{x+h}{2} \Rightarrow$$

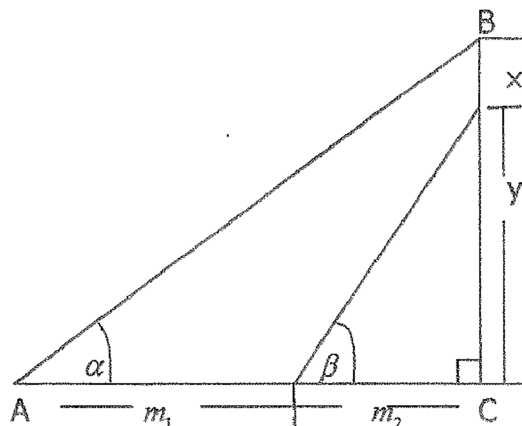
$\dfrac{1 + tg\,\alpha}{tg\,\alpha - 1} = \dfrac{x+h}{2}$. Reemplazando (1), obtenemos:

$$\frac{1 + \frac{2}{h}}{\frac{2}{h} - 1} = \frac{h+2}{2-h} = \frac{x+h}{2} \Rightarrow x + h = \frac{2h+4}{2-h} \Rightarrow$$

$$x = \frac{2h+4}{2-h} - h = \frac{4+h^2}{2-h}$$

$$\therefore\ x = \frac{4+h^2}{2-h}.$$

11. Sea ABC un triángulo rectángulo en C, tal que:



Demostrar que: $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{m_2x+y(m_1+2m_2)}{m_2(m_1+m_2)-y(x+y)}$

Demostración: del gráfico tenemos: $tg\,\alpha=\dfrac{x+y}{m_1+m_2}$, $tg\,\beta=\dfrac{y}{m_2}$

Además:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\,\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}=\frac{\dfrac{x+y}{m_1+m_2}+\dfrac{y}{m_2}}{1-\dfrac{x+y}{m_1+m_2}\cdot\dfrac{y}{m_2}}=\frac{xm_2+ym_2+ym_1+ym_2}{m_2(m_1+m_2)-y(x+y)}$$

$$=\frac{xm_2+y(m_1+2m_2)}{m_2(m_1+m_2)-y(x+y)}$$

$$\therefore tg(\alpha+\beta)=\frac{xm_2+y(m_1+2m_2)}{m_2(m_1+m_2)-y(x+y)}$$

12. Demostrar que: $\dfrac{1}{sen10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}=4$.

Demostración: $\dfrac{1}{sen10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos10^\circ}=\dfrac{\cos10^\circ-\sqrt{3}\ sen10^\circ}{sen10^\circ\cdot\cos10^\circ}=$

$$= \frac{2(\cos 10° - \sqrt{3}\ sen 10°}{2 sen 10° \cdot \cos 10°} = \frac{4\left(\frac{1}{2}\cos 10° - \frac{\sqrt{3}}{2} sen 10°\right)}{2 sen 10° \cdot \cos 10°} =$$

$$= \frac{4\left(sen 30° \cdot \cos 10° - \cos 30° \cdot sen 10°\right)}{sen 20°} = \frac{4 sen(30° - 10°)}{sen 20°} =$$

$$= 4\,\frac{sen 20°}{sen 20°} = 4$$

$$\therefore \frac{1}{sen 10°} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10°} = 4.$$

13. Si $tg\,\beta = 2\ sen\alpha \cdot sen\gamma \cdot cosec(\alpha + \gamma)$, demostrar que $\cot g\alpha, \cot g\beta$ y $\cot g\gamma$ están en progresión aritmética (P.A.).

Demostración: Si $\cot g\alpha, \cot g\beta$ y $\cot g\gamma$ están en progresión aritmética, debe cumplirse que:

$\cot g\beta - \cot g\alpha = \cot g\gamma - \cot g\beta$ ó

$2\cot g\beta = \cot g\alpha + \cot g\gamma$

Como $tg\,\beta = 2\ sen\alpha \cdot sen\gamma \cdot cosec\ (\alpha + \gamma)$

$$\frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{2 sen\alpha \cdot sen\gamma \cdot cosec\ (\alpha + \beta)}$$

$$\cot g\beta = \frac{sen(\alpha + \gamma)}{2\ sen\alpha \cdot sen\gamma}$$

$$2\cot g\beta = \frac{sen\alpha \cdot \cos\gamma + sen\gamma \cdot \cos\alpha}{sen\alpha \cdot sen\gamma}$$

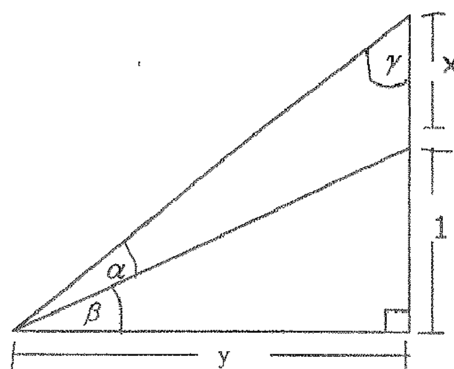
$$= \frac{sen\alpha \cdot \cos\gamma}{sen\alpha \cdot sen\gamma} + \frac{sen\gamma \cdot \cos\alpha}{sen\alpha \cdot sen\gamma}$$

$$= \cot g\gamma + \cot g\alpha$$

$$\therefore 2\cot g\beta = \cot g\gamma + \cot g\alpha$$

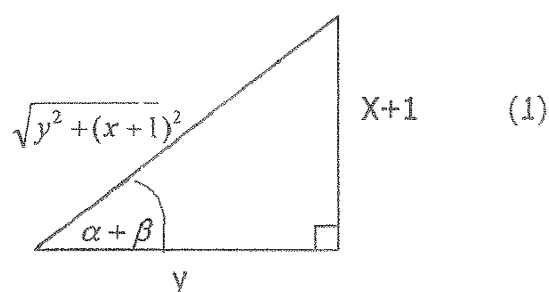
Lo que significa que $\cot g\alpha.\ \cot g\beta$ y $\cot g\gamma$ están en P.A.

14. Dado el siguiente triángulo.

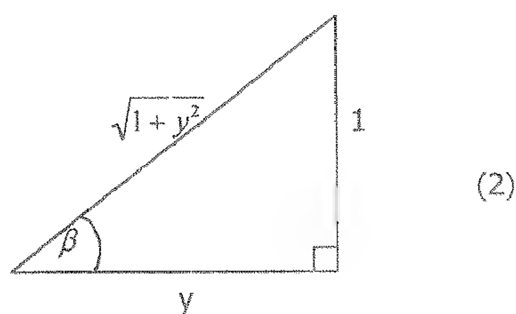


Demostrar que: $A = \dfrac{\operatorname{cosec}\beta \cdot \cos(\beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta)} = x.$

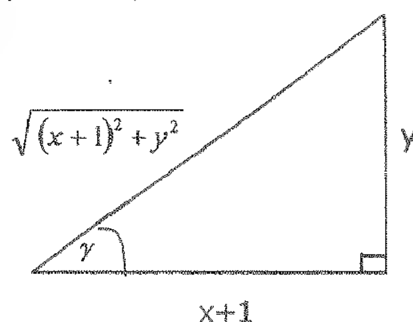
Demostración: del triángulo se obtiene que: $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{x+1}{y}$, es decir,



$tg\beta = \dfrac{1}{y}$, es decir ,



$tg\gamma = \frac{y}{x+1}$, es decir,



Además:

$\cos(\beta+\gamma) = \cos\beta\cdot\cos\gamma - sen\,\beta\cdot sen\gamma$

$$= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}$$

$$= \frac{yx+y-y}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = \frac{yx}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}}, \qquad (3)$$

Luego, reemplazamos (1) , (2) y (3) en:

$$A = \frac{\operatorname{cosec}\beta\cdot\cos(\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sqrt{1+y^2}\cdot\frac{yx}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{(x+1)^2+y^2}}}{\frac{y}{\sqrt{y^2+(x+1)^2}}}$$

$$= \frac{yx\sqrt{y^2+(x+1)^2}}{y\sqrt{(x+1)^2+y^2}} = x$$

$$\therefore\ \frac{\operatorname{cosec}\beta\cdot\cos(\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta)} = x.$$

15. Verificar que $\cos 57° + sen\,27° = \cos 3°$.

<u>Solución:</u>

Observamos que 57º=60º-3º y 27º=30º-3º

Luego:

$\cos 57° + sen\,27° = \cos(60°-3°) + sen(30°-3°)$

$$= \cos 60° \cdot \cos 3° + sen\,60° \cdot sen\,3° + sen\,30° \cdot \cos 3° - sen\,3° \cdot \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2}\cos 3° + \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,3° + \frac{1}{2}\cos 3° - \frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,3°$$

$$= \cos 3°.$$

$$\therefore \cos 57° + sen\,27° = \cos 3°.$$

16. Demostrar que:

$$\frac{tg\,\alpha}{1-\cot g\,\alpha} + \frac{\cot g\,\alpha}{1-tg\,\alpha} = 1 + tg\,\alpha + \cot g\,\alpha\,.$$

<u>Demostración</u>: Como la igualdad está en función sólo de $tg\,\alpha$ y $\cot g\,\alpha$, trabajaremos en función de $tg\,\alpha$, es decir:

$$\frac{tg\,\alpha}{1-\cot g\,\alpha} + \frac{\cot g\,\alpha}{1-tg\,\alpha} = \frac{tg\,\alpha}{1-\frac{1}{tg\,\alpha}} + \frac{\frac{1}{tg\,\alpha}}{1-tg\,\alpha}$$

$$= \frac{tg^2\alpha}{tg\,\alpha-1} + \frac{1}{tg\,\alpha - tg^2\alpha} = \frac{tg^2\alpha}{tg\,\alpha-1} - \frac{1}{tg\,\alpha\,(tg\,\alpha-1)} =$$

$$= \frac{tg^3\alpha-1}{tg\,\alpha(tg\,\alpha-1)} = \frac{(tg\,\alpha-1)(tg^2\,\alpha+tg\,\alpha+1)}{tg\,\alpha(tg\,\alpha-1)}$$

$$= \frac{tg^2\,\alpha+tg\,\alpha+1}{tg\,\alpha} = tg\,\alpha + 1 + \frac{1}{tg\,\alpha} = tg\,\alpha + 1 + \cot g\,\alpha$$

$$\therefore \frac{tg\,\alpha}{1-\cot g\,\alpha} + \frac{\cot g\,\alpha}{1-tg\,\alpha} = 1 + tg\,\alpha + \cot g\,\alpha.$$

17. Si $tg\,(3\alpha-35°) = \cot g(90°-\beta)$ y $sen(\,2\beta-\alpha)\cdot cosec\,15° = 1$, calcular el valor de : $2\,sen(\,\alpha+\beta-3°) + tg(\alpha-\beta+44°)$, siendo 3α $35°$ y $2\beta-\alpha$ ángulos. agudos.

<u>Solución:</u>

Como $tg(\,3\alpha-35°) = \cot g(90°-\beta) \Rightarrow$

$tg\left(3\alpha-35^{\circ}\right)=tg\,\beta \Rightarrow 3\alpha-35^{\circ}=\beta$ (1) , ya que estos ángulos son agudos.

Además:

$sen\left(2\beta-\alpha\right)\cdot \operatorname{cosec}15^{\circ}=1 \Rightarrow sen\left(2\beta-\alpha\right)=sen15^{\circ} \Rightarrow 2\beta-\alpha=15^{\circ}$ (2), por la misma razón anterior.

Resolvamos el sistema formado por (1) y (2) , obteniendo:

$$\begin{array}{ll} 3\alpha-\beta & =35^{\circ} \\ -\alpha+2\beta & =15^{\circ} \end{array} \qquad \alpha=17^{\circ},\quad \beta=16^{\circ}$$

Luego reemplazando α y β, obtenemos que:

$$2\,sen\left(\alpha+\beta-3^{\circ}\right)+tg\left(\alpha-\beta+44^{\circ}\right)=2\,sen30^{\circ}+tg45^{\circ}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}+1=2$$

$$\therefore\ 2\,sen\left(\alpha+\beta-3^{\circ}\right)+tg\left(\alpha-\beta+44^{\circ}\right)=2$$

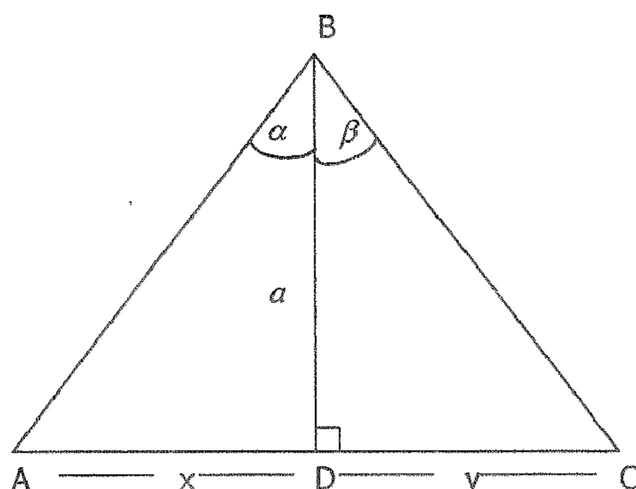
18. Sea ABC un triángulo cualquiera, siendo $a=\overline{BD}=$ altura del triángulo, $\overline{CD}=y$, $\overline{DA}=x$, $\measuredangle DBC=\beta$ y $\measuredangle DBA=\alpha$, demostrar que:

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{a\,(x+y)}{a^{2}-xy}$$

<u>Demostración:</u> Según los datos tenemos:

$$tg\,\alpha=\frac{x}{a},\qquad tg\,\beta=\frac{y}{a}\qquad (1)$$

$$\therefore\ tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\,\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\,\beta}$$



Reemplazando obtenemos (1) , obtenemos:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{a}}{1-\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{a}}=\frac{\frac{x+y}{a}}{\frac{a^2-xy}{a^2}}=\frac{a\,(x+y)}{a^2-xy}$$

19. Si $1+2\,tg\,x\cdot sen\,y=tg\,x+2\,sen\,y$, determinar el valor de $tg\,(x+y)$, siendo x, y agudos.

<u>Solución:</u>

Como $1+2tg\,x\cdot sen\,y=tgx+2\,sen\,y$, tenemos:

$$2\,tg\,x\cdot sen\,y-tg\,x+1-2\,sen\,y=0$$

$$tg\,x\,(2sen\,y-1)-(2sen\,y-1)=0$$

$(2\,sen\,y-1)(tg\,x-1)=0$, de donde

$$2sen\,y-1=0\Rightarrow sen\,y=\frac{1}{2}\Rightarrow y=30°$$

$$tg\,x-1=0\Rightarrow tg\,x=1\Rightarrow x=45°$$

$$\therefore\ tg(x+y)=tg(45°+30°)=\frac{tg\,45°+tg\,30°}{1-tg\,45°\cdot tg\,30°}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

Racionalizando, obtenemos que:

$$tg\ (x+y) = tg\,75° = 2+\sqrt{3}$$

20. Si $sen\,x + \cos x = n$, determinar el valor de :

$M = \left(tg\,x + \cot g\,x + \sec x + \operatorname{cosec} x\right) \cdot sen\,x \cdot \cos x,$ en función de "n".

Solución: En este caso nos conviene expresar M en función de $sen\,x\ y/o\ \cos x$, es decir,

$$M = \left(\frac{sen\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{sen\,x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{sen\,x}\right) sen\,x \cdot \cos x$$

$$= \left(\frac{sen^2 x + \cos^2 x + sen\,x + \cos x}{sen\,x \cdot \cos x}\right) \cdot sen\,x \cdot \cos x$$

$$= 1 + (sen\,x + \cos x)$$

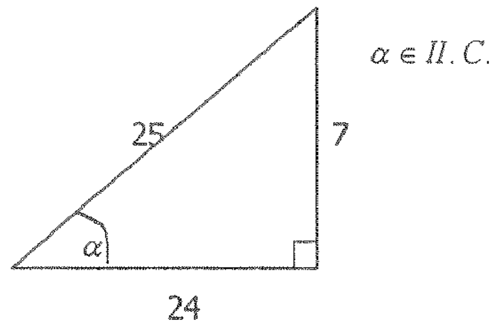
$$= 1+n$$

$$\therefore M = 1+n.$$

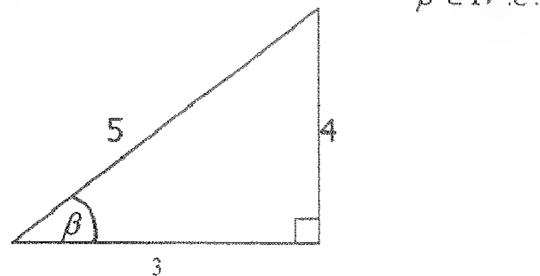
21. Si $sen\,\alpha = 0,28,\ \alpha \in II.C.$ y $\cos\beta = 0,6,\ \beta \in IV.C.$, determinar el valor de $\cos(\alpha + \beta)$.

Solución: Tenemos:

$sen\,\alpha = 0,28 = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} \Rightarrow$ $\alpha \in II.C.$



$\cos\beta = 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ $\beta \in IV.C.$



$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

$$= \left(-\frac{24}{25}\right)\cdot\frac{3}{5} - \frac{7}{25}\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{-72+28}{125} = -\frac{44}{125}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = -\frac{44}{125}$$

22. Si $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, demostrar que:

$$tg\,\alpha - tg\,\beta + tg\gamma - tg\,\gamma \cdot tg\,\alpha \cdot tg\,\beta = -2\,tg\,\beta.$$

Demostración: Como:

$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \alpha+\beta=\pi-\gamma$. Si a esta última igualdad le aplicamos tangente, obtenemos:

$$tg(\alpha+\beta) = tg(\pi-\gamma) = -tg\,\gamma$$

$$\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\beta} = -\,tg\,\gamma \Rightarrow$$

$$tg\,\alpha + tg\beta = -tg\,\gamma + tg\,\alpha\cdot tg\,\beta\cdot tg\,\gamma \Rightarrow$$

$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma - tg\,\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma = 0$, restamos $2tg\,\beta$ a ambos lados y obtenemos: $tg\alpha - tg\beta + tg\gamma - tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma = -2tg\,\beta$ que es lo pedido.

23. Si $A = \dfrac{-\sec^2(90°-\alpha) + \cot g^2(-180°-\alpha)}{4sen\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right) - 8\cos^2(270°+\alpha)}$, verificar que $A = \dfrac{1}{4}$.

Solución:

$$A = \frac{-(cosec\,\alpha)^2 + [-\cot g(180°+\alpha)]^2}{4sen\left[-\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\,\alpha\right)\right] - 8\cos^2(270° + \alpha)}$$

$$= \frac{-cosec^2\alpha + \cot g^2\alpha}{-4\cos 2\alpha - 8\,sen^2\alpha} = \frac{cosec^2\alpha - \cot g^2\alpha}{4\cos 2\alpha + 8sen^2\alpha}$$

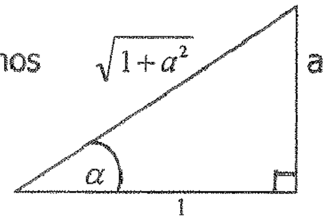
$$= \frac{\operatorname{cosec}^2\alpha - \left(\operatorname{cosec}^2\alpha - 1\right)}{4\left(1 - 2sen^2\alpha\right) + 8sen^2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore A = \frac{1}{4}.$$

24. Si $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$ $\alpha \in I.C.$, verificar que:

$$\sec 2\alpha + tg\,2\alpha = \frac{1+a}{1-a}$$

Solución: Como , $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}$, tenemos



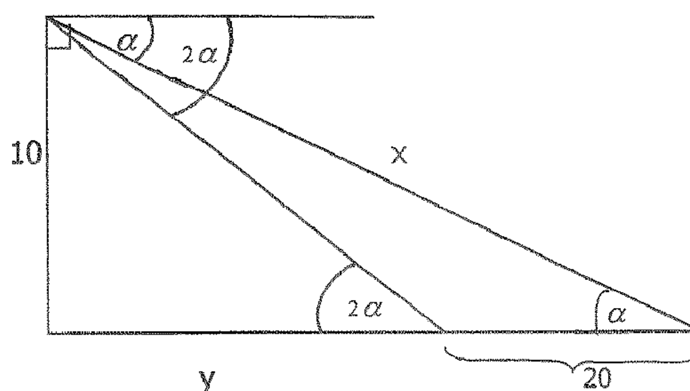
$$\sec 2\alpha + tg\,2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha} + \frac{sen2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + sen2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{1 + 2sen\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{1 + 2\cdot\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}}{\frac{1}{1+a^2} - \frac{a^2}{1+a^2}}$$

$$= \frac{1 + \frac{2a}{1+a^2}}{\frac{1-a^2}{1+a^2}} = \frac{\frac{1+a^2+2a}{1+a^2}}{\frac{1-a^2}{1+a^2}} = \frac{(1+a)^2}{(1-a)(1+a)} = \frac{1+a}{1-a}$$

25. Desde lo alto de una torre de 10 m de altura, los ángulos de depresión de dos objetos, que están en una misma dirección, son uno igual a la mitad del otro. Si la distancia entre los objetos es de 20m, determinar la distancia entre la parte superior de la torre y el objeto más lejano.

<u>Solución:</u> De acuerdo al enunciado, gráficamente tenemos:



Luego:

$$tg\,2\alpha = \frac{10}{y} \qquad (1)$$

$$tg\,\alpha = \frac{10}{y+20} \qquad (2)$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$$ De (1) y (2) $$\frac{10}{y} = \frac{\dfrac{20}{y+20}}{1-\dfrac{100}{(y+20)^2}}$$

$$\frac{10}{y} = \frac{\dfrac{20}{y+20}}{\dfrac{(y+20)^2-100}{(y+20)^2}} \Rightarrow \frac{10}{y} = \frac{20(y+20)}{y^2+40y+300} \Rightarrow$$

$$y^2+40y+300 = 2y^2+40y \Rightarrow y^2 = 300 \Rightarrow y = 10\sqrt{3}.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras, obtenemos:

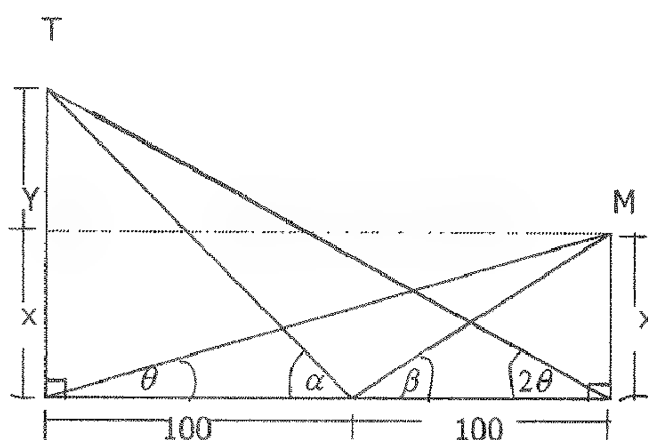
$$x = \sqrt{10^2+\left(20+10\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{100+400+400\sqrt{3}+300}$$

$$= \sqrt{800+400\sqrt{3}} = \sqrt{400\left(2+\sqrt{3}\right)} = 20\sqrt{2+\sqrt{3}}\ m$$

$\therefore$ La distancia pedida es de $20\sqrt{2+\sqrt{3}}\ m.$

26. En los extremos de una calle hay una torre y un monumento los cuales distan 200m desde sus bases. Desde el punto medio de la calle se miden los ángulos de elevación a la parte superior de ellos, siendo la suma de estos igual a 90º. Desde el pie de la torre el ángulo de elevación de la parte superior del monumento es θ, y desde el pie del monumento el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es 2θ. Calcular la altura de la torre y del monumento.

Solución: Gráficamente tenemos:



Siendo T la torre y M el monumento, de acuerdo al gráfico, obtenemos que:

$$tg\,\theta = \frac{x}{200}, \quad tg\,2\theta = \frac{x+y}{200}, \quad \alpha+\beta = 90^\circ, \quad tg\,\alpha = \frac{x+y}{100}, \quad tg\beta = \frac{x}{100}$$

Como $\alpha+\beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ-\beta \quad \therefore tg\,\alpha = tg(90^\circ-\beta) = \cot g\,\beta$

$$\therefore \frac{x+y}{100} = \frac{100}{x} \Rightarrow x+y = \frac{(100)^2}{x} \qquad (1)$$

Además: $$tg\,2\theta = \frac{2tg\,\theta}{1-tg^2\theta} \Rightarrow \frac{x+y}{200} = \frac{\frac{2x}{200}}{1-\frac{x^2}{(200)^2}} = \frac{400x}{(200)^2-x^2} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2), obtenemos:

$$\frac{(100)^2}{200\ x} = \frac{400x}{(200)^2 - x^2} \Rightarrow 50(200)^2 - 50x^2 = 400x^2$$

$$\Rightarrow 450x^2 = (200)^2 \cdot 50 \Rightarrow x^2 = \frac{(200)^2}{9} \Rightarrow x = \frac{200}{3}$$

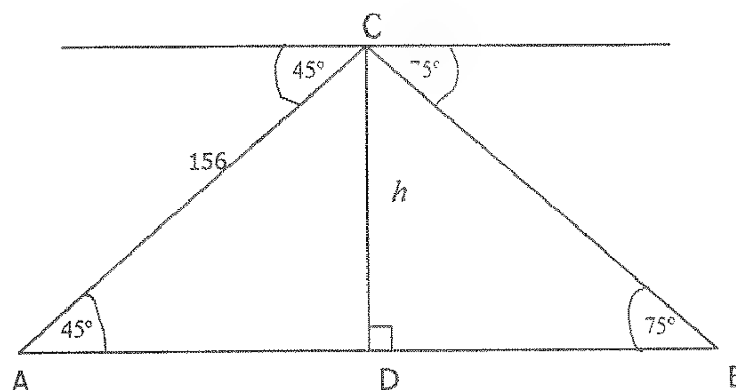
Reemplazando este valor en (1) , tenemos:

$$\frac{200}{3} + y = \frac{(100)^2}{\frac{200}{3}} \Rightarrow y = \frac{3 \cdot \overline{100}^2}{200} - \frac{200}{3} = 150 - \frac{200}{3} = \frac{250}{3}$$

$\therefore$ la torre mide $x + y = \frac{200}{3} + \frac{250}{3} = 150m$ y el monumento, $x = \frac{200}{3}m.$

27. Desde la parte superior de una luminaria ubicada en el bandejón central de una avenida se visualizan, a su izquierda y derecha las bases de dos semáforos, con ángulos de depresión de 45° y 75°, respectivamente. Si la distancia desde la base del semáforo izquierdo hasta la parte superior de la luminaria es de 156 m, determinar la distancia entre los semáforos.

Solución: Gráficamente tenemos:



Siendo A y B semáforos y C parte superior luminaria $\overline{AB} =$ distancia pedida.

Sea $\overline{AD} = x$, $\overline{DB} = y$

En $\Delta\ ADC$: $sen 45° = \frac{h}{156} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{156} \Rightarrow h = 78\sqrt{2} \Rightarrow \overline{AD} = x = 78\sqrt{2}$ (1)

ya que $\Delta\ ADC$ es isósceles.

Sabemos que $tg\,75° = 2+\sqrt{3}$, (valor obtenido en el ejercicio 7 de este capitulo). Luego en $\Delta\, DBC$,

$$tg\ 75° = 2+\sqrt{3} = \frac{h}{y} = \frac{78\sqrt{2}}{y} \Rightarrow y = \frac{78\sqrt{2}}{2+\sqrt{3}} = 78\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right) \quad (2)$$

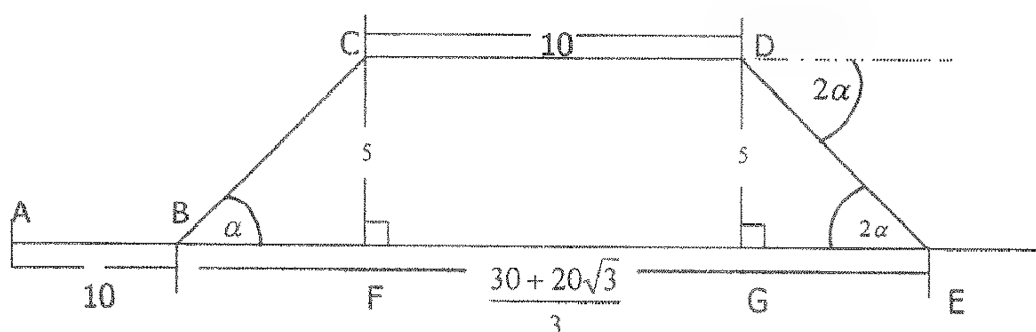
$\therefore$ De (1) y (2), la distancia pedida es : $\overline{AB} = x+y = 78\sqrt{2} + 78\sqrt{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$

$$= 78\sqrt{2}\left(1+2-\sqrt{3}\right)$$

$$= 78\sqrt{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\ m.$$

28. Una persona está ubicada en una tienda del primer nivel de un centro comercial. En forma recta camina 10 m, encontrándose con una escalera mecánica que conduce al segundo nivel y que tiene una altura de 5 m, visualizando la parte superior de la escalera con un ángulo de elevación α. Sube al segundo nivel y recorre 10 m en el mismo sentido y dirección que utilizó en el trayecto que realizó en el primer nivel. En este lugar encuentra otra escalera mecánica que baja al primer nivel y visualiza su base con un ángulo de depresión igual al doble de α. Si la distancia entre las bases de las escaleras es de $\dfrac{30+20\sqrt{3}}{3}$, determinar la distancia total recorrida por esta persona.

Solución: Gráficamente tenemos:



Se nos está pidiendo el valor de $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$ si $\overline{BF}=x,\ \overline{GE}=y$ entonces $x+10+y=\dfrac{30+20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x+y=\dfrac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}-x$ (1). Por otro lado en $\Delta\ BCF,\ tg\,\alpha=\dfrac{5}{x}$ y en $\Delta\ DGE,\ tg\,2\alpha=\dfrac{5}{y}$

Como $tg\,2\alpha=\dfrac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$, reemplazando, obtenemos:

$$\frac{5}{y}=\frac{\frac{10}{x}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{10x}{x^2-25} \Rightarrow y=\frac{x^2-25}{2x} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{20\sqrt{3}}{3}-x=\frac{x^2-25}{2x} \Rightarrow 40\sqrt{3}\,x-6x^2=3x^2-75 \Rightarrow$$

$$9x^2-40\sqrt{3}\,x-75=0 \Rightarrow \left(3\sqrt{3}\,x+5\right)\left(\sqrt{3}\,x-15\right)=0 \Rightarrow$$

$3\sqrt{3}\,x+5=0 \Rightarrow \quad x=-\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$ (no es solución, por ser negativo) ó

$$\sqrt{3}\,x-15=0 \Rightarrow x=\frac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$$

Reemplazando este valor en (1), obtenemos: $y=\dfrac{20\sqrt{3}}{3}-5\sqrt{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{25+75}=10, \qquad \overline{DE}=\sqrt{25+\frac{25}{3}}=\sqrt{\frac{100}{3}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Por lo tanto, la distancia pedida es:

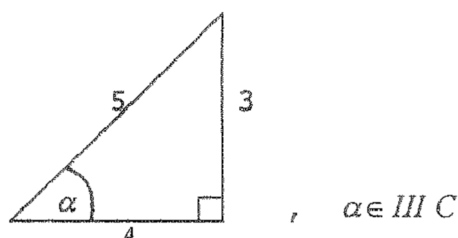
$$10+10+10+\frac{10\sqrt{3}}{3}=30+\frac{10\sqrt{3}}{3}=\frac{10\left(9+\sqrt{3}\right)}{3}\ m.$$

29. Determinar el valor de $\cot g\dfrac{\alpha}{2}$ si $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$ y $\alpha\in III\ C.$

Solución:

Si $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2}\in II\ C$

Además,

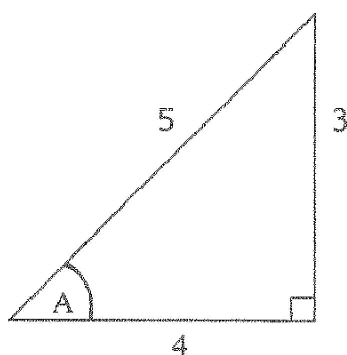


, $\alpha \in III\ C$

Luego, $\cot g\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{tg\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{1+\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{1+\left(-\dfrac{4}{5}\right)}{-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{1-\dfrac{4}{5}}{-\dfrac{3}{5}} = \dfrac{\dfrac{1}{5}}{-\dfrac{3}{5}} = -\dfrac{1}{3}$

30. Si $\cos A = -\dfrac{4}{5}$ y $A \in II.C.$, determinar el valor de $\cos 2A$ y $\cos\dfrac{A}{2}$, indicando el cuadrante al cual pertenecen $2A$ y $\dfrac{A}{2}$.

Solución: Como $\cos A = -\dfrac{4}{5}$, tenemos:



Como $A \in II.C. \rightarrow sen\ A = \dfrac{3}{5}$

Además $\cos 2A = \cos^2 A - sen^2 A$ ó

$= 2\cos^2 A - 1$ ó

$= 1 - 2sen^2 A.$

Sabemos que utilizando cualquiera de estas tres igualdades el valor de $\cos 2A$ es el mismo, luego: $\cos 2A = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$

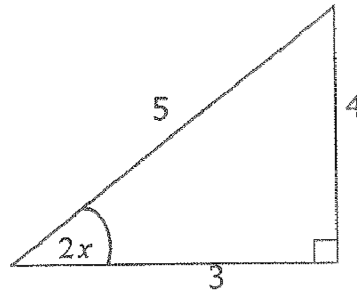
Como $\frac{\pi}{2} < A < \pi \Rightarrow \pi < 2A < 2\pi$. Pero $\cos 2A > 0 \Rightarrow (2A) \in IV.C.$

Por otro lado, $\frac{\pi}{4} < \frac{A}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{A}{2}\right) \in I.C.$

Luego, $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

31. Si $\operatorname{cosec} 2x = -1{,}25$, $(2x) \in IV.C.$, calcular el valor de $\cos^2 x - tg\, 2x - \frac{2}{15}$.

<u>Solución:</u> Como $\operatorname{cosec} 2x = -1{,}25 = \frac{-125}{100} = -\frac{5}{4} \Rightarrow sen\, 2x = -\frac{4}{5}$, es decir:



Pero, $\frac{3\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < x < \pi \Rightarrow x \in II.C$

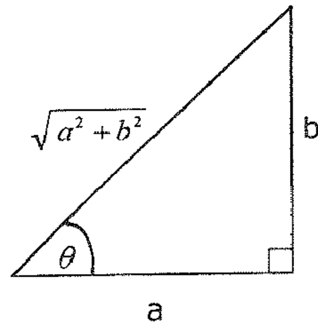
$\therefore \cos^2 x - tg\, 2x - \frac{2}{15} = \cos^2 x - \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{15} = \cos^2 x + \frac{18}{15} = \cos^2 x + \frac{6}{5}$

Además, $\cos x = -\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \cos^2 x - tg\, 2x - \frac{2}{15} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{6}{5} = \frac{4}{5} + \frac{6}{5} = 2.$

32. Si $tg\theta = \dfrac{b}{a}$, $\theta \in III.C.$, demostrar que: $a\cos 2\theta + b\,sen\,2\theta = a$.

Demostración: Si $tg\theta = \dfrac{b}{a}$ entonces:



$\theta \in III.C.$

Luego, $a\cos 2\theta + b\,sen 2\theta = a\left(1 - 2\,sen^2\theta\right) + 2b\,sen\theta\cos\theta$

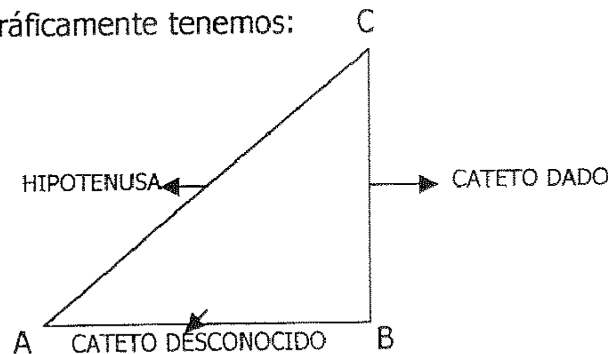
$$= a\left[1 - 2\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2\right] + 2b\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= a\left(\frac{a^2+b^2-2b^2}{a^2+b^2}\right) + \frac{2ab^2}{a^2+b^2} = a\,\frac{a^2-b^2+2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a\left(a^2+b^2\right)}{a^2+b^2} - a$$

33. En un triángulo rectángulo el valor de la hipotenusa es $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\beta - \cot g\,\beta} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\beta + \cot g\,\beta}$ y el de un cateto es $\dfrac{2\left(1+\cos 2\beta\right)}{sen\,2\beta}$.

Determinar el valor del otro cateto.

Solución: Gráficamente tenemos:



Siendo ABC un Δ rectángulo y $\overline{AB} = x$. Aplicando teorema de Pitágoras, obtenemos:

$$x^2 = \left(\frac{1}{cosec\,\beta - \cot g\,\beta} + \frac{1}{cosec\,\beta + \cot g\,\beta} \right)^2 - \frac{4(1+\cos 2\beta)^2}{sen^2 2\beta}$$

$$= \left(\frac{cosec\,\beta + \cot g\,\beta + cosec\,\beta - \cot g\,\beta}{(cosec\,\beta - \cot g\,\beta)\,(cosec\,\beta + \cot g\,\beta)} \right)^2 - \frac{4\cdot(1 + 2\cos^2\beta - 1)}{4\,sen^2\beta \cdot \cos^2\beta}$$

$$= \frac{4\ cosec^2\beta}{(cosec^2\beta - \cot g^2\beta)^2} - \frac{4\cos^4\beta}{sen^2\beta\cdot\cos^2\beta}$$

$$= 4\ cosec^2\beta - \frac{4\cos^2\beta}{sen^2\beta}$$

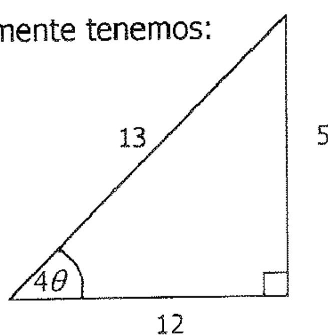
$$= 4\left(cosec^2\,\beta - \cot g^2\,\beta \right)$$

$$= 4 \Rightarrow \quad x^2 = 4$$

$\therefore$ el cateto pedido vale 2.

34. Si $\cot g\,4\theta = \frac{12}{5}$, $(4\theta) \in III.C.$, determinar el valor de $sen\,2\theta$ y $\cos 8\theta$.

Solución: Gráficamente tenemos:



Como $(4\theta) \in III.C. \Rightarrow \pi < 4\theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow (2\theta) \in II\,C.$

Luego, $sen\,2\theta = \sqrt{\dfrac{1-\cos 4\theta}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)}{2}} = \sqrt{\dfrac{25}{26}} = \dfrac{5}{\sqrt{26}}$

$$\cos 8\theta = \cos^2 4\theta - sen^2 4\theta = \left(-\frac{12}{13}\right)^2 - \left(\frac{-5}{13}\right)^2 = \frac{144-25}{169} = \frac{119}{169}$$

35. Si $sen\,\beta$ es la media geométrica entre $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$, demostrar que $\cos 2\beta = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Demostración: Que $sen\,\beta$ sea la media geométrica entre $sen\,\alpha$ y $\cos\alpha$ significa que se cumple: $sen\,\beta = \sqrt{sen\,\alpha \cdot \cos\alpha}$ que es nuestra hipótesis a considerar. Elevándola al cuadrado, obtenemos:

$$sen^2\beta = sen\,\alpha \cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

Por otro lado:

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 2\left[\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha - sen\frac{\pi}{4}\cdot sen\,\alpha\right]^2$$

$$= 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}}sen\,\alpha\right]^2$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(\cos\alpha - sen\,\alpha)^2$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot sen\,\alpha + sen^2\alpha$$

$= 1 - 2\cos\alpha\cdot sen\,\alpha$ reemplazando (1), tenemos:

$$1 - 2\,sen^2\beta = \cos 2\beta$$

$$\therefore\ \cos 2\beta = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

36. Si $tg\dfrac{\theta}{2} = \operatorname{cosec}\theta - sen\,\theta$, demostrar que $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Demostración: Considerando la hipótesis tenemos:

$$tg\frac{\theta}{2} = \cos ec\theta - sen\theta = \frac{1}{sen\theta} - sen\theta \Rightarrow \frac{sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2\,sen\frac{\theta}{2}} - 2\,sen\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1 - 4\,sen^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\,sen\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}} \Rightarrow 2\,sen^2\frac{\theta}{2} = 1 - 4\,sen^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta}{2},\ sen\frac{\theta}{2} \neq 0,\ \cos\frac{\theta}{2} \neq 0$$

expresando esta igualdad en función de $\cos^2\frac{\theta}{2}$, obtenemos:

$2\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 4\left(1 - \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}$ y ordenando $4\cos^4\frac{\theta}{2} - 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 0$

$$\therefore\ \cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Como $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ y $\cos^2\frac{\theta}{2} > 0$, tenemos $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

37. Determinar el valor de $sen\,4x$, sabiendo que $tg\,x = 2$.

Solución:

Como $tg\,x = 2 \Rightarrow$ $\sqrt{5}$ 2 $x \in I.C.$ ó III.C.

x

1

$$\therefore\ sen\,4x = 2\,sen\,2x \cdot \cos 2x$$
$$= 4\,sen\,x \cdot \cos x\,\left(2\cos^2 x - 1\right)$$

Si $x \in I.C.$ ó III.C., $sen\,x \cdot \cos x > 0$.

Supongamos $x \in I.C.$ $sen\,4x = 4 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1\right) = \frac{8}{5}\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$

38. Si $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$, determinar el valor de $\dfrac{sen\,\alpha - sen\,\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}$.

Solución:

Como $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{3}-\beta$, luego $\dfrac{sen\,\alpha - sen\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\dfrac{sen\left(\dfrac{\pi}{3}-\beta\right)-sen\beta}{\cos\beta-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\beta\right)}$

$$=\frac{sen\frac{\pi}{3}\cdot\cos\beta - sen\,\beta\cdot\cos\frac{\pi}{3}-sen\,\beta}{\cos\beta-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\beta - sen\frac{\pi}{3}\cdot sen\,\beta}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\beta - sen\,\beta\cdot\frac{1}{2}-sen\,\beta}{\cos\beta-\frac{1}{2}\cdot\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\,sen\,\beta}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\cos\beta-3\,sen\,\beta\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\beta-\sqrt{3}\,sen\,\beta\right)}\cdot\frac{\cos\beta+\sqrt{3}\,sen\,\beta}{\cos\beta+\sqrt{3}\,sen\,\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos^2\beta+3\,sen\,\beta\cos\beta-3\,sen\,\beta\cos\beta-3\sqrt{3}\,sen^2\beta}{\cos^2\beta-3\,sen^2\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\left(\cos^2\beta-3\,sen^2\beta\right)}{\cos^2\beta-3\,sen^2\beta}=\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \frac{sen\,\alpha-sen\,\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\sqrt{3}.$$

39. Expresar $\dfrac{sen\,3\alpha}{sen\,2\alpha - sen\,\alpha}$ en función de $\cos\alpha$.

Solución:

$$\frac{sen3\alpha}{sen2\alpha-sen\alpha}=\frac{sen(2\alpha+\alpha)}{sen2\alpha-sen\alpha}=\frac{sen2\alpha\cdot\cos\alpha+sen\alpha\cdot\cos2\alpha}{sen2\alpha-sen\alpha}$$

$$=\frac{2\,sen\alpha\,\cos^2\alpha+sen\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)}{2\,sen\alpha\cdot\cos\alpha-sen\alpha}$$

$$=\frac{sen\alpha\left(2\cos^2\alpha+2\cos^2\alpha-1\right)}{sen\alpha\left(2\cos\alpha-1\right)}=\frac{4\cos^2\alpha-1}{2\cos\alpha-1}=\frac{\left(2\cos\alpha-1\right)\left(2\cos\alpha+1\right)}{2\cos\alpha-1}$$

$$=2\cos\alpha+1$$

$$\therefore \frac{sen3\alpha}{sen2\alpha - sen\alpha} = 2\cos\alpha + 1.$$

40. Si $A+B+C=0$, comprobar que:

$1+2senB\,sen\,C\cos A+\cos^2 A=\cos^2 B+\cos^2 C$

Solución: Como A + B + C = 0 entonces A= - B - C

Luego, $1+2\,senB\,senC\,\cos A+\cos^2 A=$

$1+2senB\,senC\cos(-B-C)+\cos^2(-B-C)=$

$1+2sen\,B\,senC\,\cos(B+C)+\cos^2(B+C)=$

$1+2senB\,senC(\cos B\cos C-senB\,senC)+\cos^2(B+C)=$

$1+2senB\,senC\cos B\cos C-2sen^2B\,sen^2C+\cos^2(B+C)=$

$1+2senB\,senC\,\cos B\cos C-2sen^2B\,sen^2C+(\cos B\cos C-senB\,senC)^2=$

$1+2senB\,senC\cdot\cos B\cdot\cos C-2sen^2B\,sen^2C+\cos^2B\cos^2C-2\cos B\cos C$

$senB\,senC+sen^2B\,sen^2C=1-sen^2B\,sen^2C+\cos^2B+\cos^2C$

$1-(1-\cos^2B)(1-\cos^2C)+\cos^2B\cos^2C=$

$1-1+\cos^2C+\cos^2B-\cos^2B\cos^2C+\cos^2B\cos^2C=\cos^2C+\cos^2B$

$\therefore 1+2\,senB\,senC\,\cos A+\cos^2A=\cos^2B+\cos^2C.$

41. Determinar los valores de $tg\frac{x}{2}$, sabiendo que

$\cos x-sen\alpha\cdot\cot g\beta\cdot sen\,x=\cos\alpha$ con $\alpha,\beta\in I.C.$.

Solución: La hipótesis dada, que está en función de $\cos x$ y $sen\,x$, la

expresaremos en función de $tg\frac{x}{2}$: $\cos x-sen\alpha\cdot\cot g\beta\cdot sen\,x=\cos\alpha\Rightarrow$

$$\left(\cos^2\frac{x}{2}-sen^2\frac{x}{2}\right)-sen\alpha\cdot\cot g\beta\left(2\,sen\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\right)=\cos\alpha$$

Dividiendo todo por $\cos^2\frac{x}{2}$, obtenemos:

$$1-tg^2\frac{x}{2}-2sen\alpha\cdot\cot g\beta\cdot tg\frac{x}{2}=\sec^2\frac{x}{2}\cdot\cos\alpha$$

$$1 - tg^2\frac{x}{2} - 2sen\alpha \cdot \cot g\beta \cdot tg\frac{x}{2} = \left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\alpha$$, ordenándola

$$(1+\cos\alpha)\, tg^2\frac{x}{2} + 2sen\alpha \cdot \cot g\beta \cdot tg\frac{x}{2} + \cos\alpha - 1 = 0$$

Luego:

$$tg\frac{x}{2} = \frac{-2sen\alpha \cdot \cot g\beta \pm \sqrt{4sen^2\alpha \cdot \cot g^2\beta - 4(1+\cos\alpha)(\cos\alpha - 1)}}{2\,(1+\cos\alpha)}$$

$$= \frac{-sen\alpha \cdot \cot g\beta \pm \sqrt{sen^2\alpha \cdot \cot g^2\beta - \cos^2\alpha + 1}}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\alpha \cdot \cot g\beta \pm \sqrt{sen^2\alpha\,(\cot g^2\beta + 1)}}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\alpha \cdot \cot g\beta \pm \sqrt{sen^2\alpha \cdot cosec^2\beta}}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\alpha \cdot \cot g\beta \pm sen\alpha \cdot cosec\,\beta}{1+\cos\alpha}$$

Deducimos que:

a) $$tg\frac{x}{2} = \frac{-sen\alpha \cdot \cot g\beta + sen\alpha \cdot cosec\,\beta}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\alpha\left(\frac{\cos\beta}{sen\beta} - \frac{1}{sen\beta}\right)}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\alpha \cdot \frac{\cos\beta - 1}{sen\beta}}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{sen\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{1-\cos\beta}{sen\beta}$$

$$= tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\beta}{2}$$

b) $$tg\frac{x}{2} = \frac{-sen\,\alpha \cdot \cot g\,\beta - sen\,\alpha \cdot cosec\,\beta}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\,\alpha\,(\cot g\,\beta + cosec\,\beta)}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{-sen\,\alpha\left(\dfrac{\cos\beta}{sen\,\beta} + \dfrac{1}{sen\,\beta}\right)}{1+\cos\alpha}$$

$$= -\frac{sen\,\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot \frac{1+\cos\beta}{sen\,\beta}$$

$$= -tg\frac{\alpha}{2} \cdot \cot g\frac{\beta}{2}.$$

42. Demostrar que: $\dfrac{1+sen\theta}{1-sen\theta} = tg^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Demostración: Sabemos que para demostrar una igualdad podemos iniciarla partiendo de cualquiera de los dos miembros. En este caso nos conviene partir del lado derecho. Luego:

$$tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{sen^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)} = \frac{\left(sen\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2} + sen\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^2}{\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2} - sen\dfrac{\pi}{4}\cdot sen\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{\theta}{2} + sen\dfrac{\theta}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\dfrac{\theta}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}sen\dfrac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + sen\dfrac{\theta}{2}\right)^2}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} - sen\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cos^2\dfrac{\theta}{2} + 2\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot sen\dfrac{\theta}{2} + sen^2\dfrac{\theta}{2}}{\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 2\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot sen\dfrac{\theta}{2} + sen^2\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1+2\,sen\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}}{1-2\,sen\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2}} = \frac{1+sen\theta}{1-sen\theta}$$

$$\therefore tg^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+sen\theta}{1-sen\theta}.$$

43. Demostrar que: $1 - 4sen^4\alpha - 2sen^2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha$

<u>Demostración:</u> partiremos del lado izquierdo. Luego:

$$1-4\left(sen^2\alpha\right)^2 - 2\,sen^2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 1-4\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right)\cdot \cos 2\alpha$$

$$= 1-4\,\frac{\left(1-2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha\right)}{4} - \left(1-\cos 2\alpha\right)\cos 2\alpha$$

$$= 1-1+2\cos 2\alpha - \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha$$

$$- \cos 2\alpha$$

$$\therefore\ 1-4\,sen^4\alpha - 2sen^2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \cos 2\alpha.$$

44. Demostrar que $sen 4\alpha = \dfrac{4\,tg\alpha\left(1-tg^2\alpha\right)}{\left(1+tg^2\alpha\right)^2}$.

<u>Demostración:</u>

$$\frac{4tg\alpha\left(1-tg^2\alpha\right)}{\left(1+tg^2\alpha\right)^2} = \frac{4tg\alpha\left(1-tg^2\alpha\right)}{\left(\sec^2\alpha\right)^2}$$

$$= 4\cdot\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\left(1-\frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\cos^4\alpha$$

$$= 4\cdot\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos^2\alpha - sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^4\alpha$$

$$= 4\,sen\alpha\cdot\cos\alpha\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right)$$

$$= 2\,sen 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

$$= sen 4\alpha$$

$$\therefore\ sen 4\alpha = \frac{4tg\alpha\left(1-tg^2\alpha\right)}{\left(1+tg^2\alpha\right)^2}.$$

45. Demostrar que : $tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\sec\theta+tg\theta.$

Demostración:

$$tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\frac{tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\theta}{2}}{1-tg\frac{\pi}{4}\cdot tg\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\frac{sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1-\frac{sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-sen\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+sen\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+sen\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+2\cos\frac{\theta}{2}\cdot sen\frac{\theta}{2}+sen^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-sen^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1+2\,sen\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-sen^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{1+sen\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{sen\theta}{\cos\theta}=\sec\theta+tg\theta$$

$$\therefore tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)=\sec\theta+tg\theta.$$

46. Demostrar que: $\frac{\cot g\alpha-1}{\cot g\alpha+1}=\frac{1-sen2\alpha}{\cos2\alpha}.$

Demostración:

$$\frac{1-sen2\alpha}{\cos 2}=\frac{1-2sen\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}=\frac{\left(sen^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-2sen\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-2sen\alpha\cos\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}=\frac{(\cos\alpha-sen\alpha)^2}{(\cos\alpha-sen\alpha)(\cos\alpha+sen\alpha)}$$

$$=\frac{\cos\alpha-sen\alpha}{\cos\alpha+sen\alpha}$$

Dividamos numerador y denominador por $sen\alpha$.

$$=\frac{\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}-\frac{sen\alpha}{sen\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{sen\alpha}+\frac{sen\alpha}{sen\alpha}}=\frac{\cot g\alpha-1}{\cot g\alpha+1}$$

$$\therefore\ \frac{\cot g\alpha - 1}{\cot g\alpha + 1} = \frac{1 - sen 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

47. Demostrar que : $\dfrac{\frac{1}{2}\, tg\frac{\alpha}{2}\ \sec\alpha - tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}}{1-\cos^2\alpha} = \dfrac{\cot g\, 2\alpha}{1+\cos\alpha}.$

Demostración:

$$\frac{\frac{1}{2}\, tg\frac{\alpha}{2}\cdot\sec\alpha - tg\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}}{1-\cos^2\alpha} = \frac{tg\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2}\sec\alpha - \frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{tg\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{2\cos\alpha} - \frac{sen^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}{1-\cos^2\alpha}$$

$$= tg\frac{\alpha}{2}\,\frac{\left(1-2sen^2\alpha\right)}{2\cos\alpha}\,\frac{1}{1-\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{2\cos\alpha\cdot sen^2\alpha}$$

$$= \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{(2\, sen\alpha\ \cos\alpha)\, sen\alpha}$$

$$= \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{sen 2\alpha}\cdot\frac{1}{sen\alpha}$$

$$= \frac{sen\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\cot g 2\alpha\cdot\frac{1}{2sen\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cot g\, 2\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\cot g\, 2\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

48. Demostrar que: $\dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{sen^3\alpha+sen\ 3\alpha}{sen\,\alpha}$ es un valor constante, independiente de α.

Demostración:

$$\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{sen^3\alpha+sen\ 3\alpha}{sen\,\alpha}=\frac{\cos^3\alpha-\cos(\alpha+2\alpha)}{\cos\alpha}+\frac{sen^3\alpha+sen(\alpha+2\alpha)}{sen\,\alpha}$$

$$=\frac{\cos^3\alpha-\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha+sen\,\alpha\cdot sen\,2\alpha}{\cos\alpha}+\frac{sen^3\alpha+sen\,\alpha\cos 2\alpha+sen\,2\alpha\ \cos\alpha}{sen\,\alpha}$$

$$=\frac{\cos^3\alpha-\cos\alpha\left(\cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)+2sen^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}+$$

$$\frac{sen^3\alpha+sen\,\alpha\left(\cos^2\alpha-sen^2\alpha\right)+2sen\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{sen\,\alpha}$$

$$=\frac{\cos^3\alpha-\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot sen^2\alpha+2sen^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}+$$

$$\frac{sen^3\alpha+sen\,\alpha\cos^2\alpha-sen^3\alpha+2sen\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{sen\,\alpha}$$

$$=\frac{3sen^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{3sen\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{sen\,\alpha}=3sen^2\alpha+3\cos^2\alpha=3$$

$\therefore\ \dfrac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{sen^3\alpha+sen 3\alpha}{sen\,\alpha}$ es independiente de α.

49. Demostrar que: $\left(\dfrac{sen 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\right)\left(\dfrac{2\ sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen\,\alpha}\right)=\sec\alpha-1.$

Demostración:

$$\frac{sen 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{2sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen\,\alpha}=\frac{2sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}{1+2\cos^2\alpha-1}\cdot\frac{2\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)}{sen\,\alpha}$$

$$= \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} = \sec\alpha - 1$$

$$\therefore \quad \frac{sen\ 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{2\ sen^2\frac{\alpha}{2}}{sen\ \alpha} = \sec\alpha - 1.$$

50. Demostrar que: $cosec 2\alpha + \cot g 4\alpha + cosec 4\alpha = \cot g\alpha.$

Demostración:

$$cosec 2\alpha + \cot g 4\alpha + cosec 4\alpha = \frac{1}{sen 2\alpha} + \frac{\cos 4\alpha}{sen 4\alpha} + \frac{1}{sen 4\alpha}$$

$$= \frac{1}{sen 2\alpha} + \frac{2\cos^2 2\alpha - 1 + 1}{2 sen 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}$$

$$= \frac{1}{sen 2\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{sen 2\alpha} = \frac{1+2\cos^2\alpha - 1}{2 sen\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \cot g\alpha$$

$$\therefore\ cosec 2\alpha + \cot g 4\alpha + cosec 4\alpha = \cot g\alpha.$$

51. Demostrar que: $sen 2\alpha + \cos 2\alpha = \dfrac{(1+tg\alpha)^2 - 2\ tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

Demostración:

$$\frac{(1+tg\alpha)^2 - 2\ tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{1+2tg\alpha + tg^2\alpha - 2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$= \frac{1+2tg\alpha - tg^2\alpha}{\sec^2\alpha} = \frac{1+2\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} - \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha + 2 sen\alpha\cdot\cos\alpha - sen^2\alpha$$

$$= (2\ sen\alpha\cdot\cos\alpha) + (\cos^2\alpha - sen^2\alpha)$$

$$= sen 2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$\therefore\ sen 2\alpha + \cos 2\alpha = \frac{(1+tg\alpha)^2 - 2tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

52. Demostrar que: $\cot g(a+\alpha)-tg(a+\alpha)=2\cot g(2a+\alpha-\beta)$, siendo $a\in R,\ \alpha+\beta=\pi$.

Demostración:

Si $\alpha+\beta=\pi \Rightarrow \alpha=\pi-\beta$ (1)

$\therefore \cot g(a+\alpha)-tg(a+\alpha)=\dfrac{1}{tg(a+\alpha)}-tg(a+\alpha)$

$=\dfrac{1-tg^2(a+\alpha)}{tg(a+\alpha)}$ amplificamos por 2, obteniendo :

$$=\frac{2\left(1-tg^2(a+\alpha)\right)}{2tg(a+\alpha)}=\frac{2}{\dfrac{2tg(a+\alpha)}{1-tg^2(a+\alpha)}}=\frac{2}{tg2(a+\alpha)}$$

$=2\cot g2(a+\alpha)=2\cot g(2a+2\alpha)$

$=2\cot g(2a+\alpha+\alpha)$, reemplazando (1), obtenemos:

$=2\cot g(2a+\alpha+\pi-\beta)$

$=2\cot g(\pi+(2a+\alpha-\beta)]$

$=2\cot g(2a+\alpha-\beta)$

$\therefore \cot g(a+\alpha)-tg(a+\alpha)=2\cot g(2a+\alpha-\beta)$.

53. Demostrar que : $\sec\theta=\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}}$, si (4θ) es un ángulo agudo.

Demostración: Considerando la igualdad a demostrar, vemos la conveniencia de iniciarla a partir del término $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}}$, es decir:

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+\cos 4\theta)}}}=\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2(1+2\cos^2 2\theta-1)}}}$$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2+2\sqrt{\cos^2 2\theta}}}$, pero $0<4\theta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 0<2\theta<\dfrac{\pi}{4}$, luego :

$$= \frac{2}{\sqrt{2+2\cos 2\theta}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(1+\cos 2\theta\right)}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(1+2\cos^2\theta-1\right)}}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{\cos^2\theta}} = \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \text{, ya que } 0 < \theta < \frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}}.$$

54. Demostrar que: $\cos(30°+\alpha)\cdot\cos(30°-\alpha) - sen(30°+\alpha)\cdot sen(30°-\alpha) = \frac{1}{2}$.

<u>Demostración:</u> Si observamos el lado izquierdo de la igualdad, notamos que los términos de la resta son producto de cosenos y producto de senos que podemos transformar a suma de razones trigonométricas.

También podemos desarrollar estos términos aplicando las fórmulas correspondientes a razones trigonométricas de $(\alpha\pm\beta)$. Sin embargo trabajaremos más rápido si aplicamos lo anterior, es decir:

$$\cos(30°+\alpha)\cdot\cos(30°-\alpha) - sen(30°+\alpha)\cdot sen(30°-\alpha) =$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left[(30°+\alpha)+(30°-\alpha)\right] + \cos\left[(30°+\alpha)-(30°-\alpha)\right]\right] -$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left[(30°+\alpha)-(30°-\alpha)\right] - \cos\left[(30°+\alpha)+(30°-\alpha)\right]\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\cos 60°+\cos 2\alpha-\cos 2\alpha+\cos 60°\right] = \frac{2\cos 60°}{2} = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos(30°+\alpha)\cdot\cos(30°-\alpha) - sen(30°+\alpha)\cdot sen(30°-\alpha) = \frac{1}{2}.$$

55. Demostrar que: $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)-sen\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)} + \sqrt{2} = 0.$

<u>Demostración:</u> Considerando la explicación dada en el ejercicio anterior, vemos que en este caso nos conviene aplicar las fórmulas que transforman sumas a producto, es decir:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)-sen\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}+\sqrt{2}=$$

$$=\frac{-2\,sen\frac{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{2}\cdot sen\frac{\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{2}}{2\cos\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}{2}\cdot sen\frac{\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)-\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}{2}}+\sqrt{2}$$

$$=\frac{-2\cdot sen\frac{\pi}{4}\cdot sen(-\theta)}{2\cos\frac{2\pi}{3}\cdot sen\theta}+\sqrt{2}$$

$$=\frac{sen\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{2\pi}{3}}+\sqrt{2}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2}}+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$$

$$\therefore\ \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}{sen\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)-sen\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}+\sqrt{2}=0.$$

56. Demostrar que: $\frac{8\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{sen\,\alpha+sen\,\beta}=2\left(\cot g\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sec\frac{\alpha-\beta}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$

<u>Demostración:</u>

$$\frac{8\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{sen\,\alpha+sen\,\beta}=\frac{8\cdot\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right]}{2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=2\left[\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{sen\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}+\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot\frac{1}{sen\frac{\alpha+\beta}{2}}\right]$$

$$= 2\left(\cot g\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sec\frac{\alpha-\beta}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\therefore\ \frac{8\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{sen\,\alpha+sen\,\beta}=2\left(\cot g\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sec\frac{\alpha-\beta}{2}+\operatorname{cosec}\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

57. Si $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, determinar el valor de $\frac{sen\,\alpha-sen\,\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}$.

Solución: Este ejercicio fue desarrollado en la página 55. En esta oportunidad lo desarrollaremos utilizando las fórmulas que transforman sumas en producto, es decir:

$$\frac{sen\,\alpha-sen\,\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\,sen\frac{\beta+\alpha}{2}\cdot sen\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}}{sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}}=\cot g\frac{\alpha+\beta}{2}=\cot g\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},$$

ya que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$,

Si comparamos ambos procedimientos, nos damos cuenta que el utilizado en este caso es más corto que el anterior.

58. Si $\alpha+\beta+\gamma=180°$, demostrar que:

$$\frac{1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma}=tg\frac{\beta}{2}\cdot\cot g\frac{\gamma}{2}.$$

Demostración: Considerando que el término derecho de la identidad a demostrar no depende de α, expresamos la hipótesis como $\alpha=180°-(\beta+\gamma)$, luego:

$$\frac{1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma}=\frac{1+\cos\left(180^{\circ}-(\beta+\gamma)\right)-(\cos\beta-\cos\gamma)}{1+\cos\left(180^{\circ}-(\beta+\gamma)\right)+(\cos\beta-\cos\gamma)}=$$

$$=\frac{1-\cos(\beta+\gamma)-(\cos\beta-\cos\gamma)}{1-\cos(\beta+\gamma)+(\cos\beta-\cos\gamma)}$$

$$=\frac{1-1+2\,sen^2\frac{\beta+\gamma}{2}-\left(-2\,sen\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot sen\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{1-1+2\,sen^2\frac{\beta+\gamma}{2}+\left(-2\,sen\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot sen\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}=$$

$$=\frac{sen^2\frac{\beta+\gamma}{2}+sen\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot sen\frac{\beta-\gamma}{2}}{sen^2\frac{\beta+\gamma}{2}-sen\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot sen\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$=\frac{sen\frac{\beta+\gamma}{2}\left(sen\frac{\beta+\gamma}{2}+sen\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{sen\frac{\beta+\gamma}{2}\left(sen\frac{\beta+\gamma}{2}-sen\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

$$=\frac{sen\frac{\beta+\gamma}{2}+sen\frac{\beta-\gamma}{2}}{sen\frac{\beta+\gamma}{2}-sen\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$=\frac{2\,sen\left(\frac{\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}}{2}\right)\cdot\cos\frac{\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}}{2}}{2\cos\frac{\frac{\beta+\gamma}{2}+\frac{\beta-\gamma}{2}}{2}\cdot sen\frac{\frac{\beta+\gamma}{2}-\frac{\beta-\gamma}{2}}{2}}$$

$$=\frac{sen\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot sen\frac{\gamma}{2}}$$

$$=tg\frac{\beta}{2}\cdot\cot g\frac{\gamma}{2}$$

$$\therefore\ \frac{1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma}=tg\frac{\beta}{2}\cdot\cot g\frac{\gamma}{2}.$$

59. En un triángulo rectángulo los catetos son :

$$\frac{(sen^3 A - \cos^3 A)(sen^3 A + \cos^3 A)}{2\, sen^2 A - 1} \quad y \quad \frac{\cos(45^\circ - 2A) - \cos(45^\circ + 2A)}{2}$$

Determinar el valor de la hipotenusa.

Solución: Sea x la hipotenusa, entonces de acuerdo al teorema de Pitágoras tenemos:

$$x^2 = \left[\frac{(sen^3 A - \cos^3 A)(sen^3 A + \cos^3 A)}{2\, sen^2 A - 1}\right]^2 + \left[\frac{\cos(45^\circ - 2A) - \cos(45^\circ + 2A)}{2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(senA - \cos A)(sen^2 A + senA\cos A + \cos^2 A)(senA + \cos A)(sen^2 A - senA\cos A + \cos^2 A)}{2\, sen^2 A - 1}\right]^2 +$$

$$\left[\frac{-2\, sen\frac{(45^\circ - 2A) + (45^\circ + 2A)}{2} \cdot sen\frac{(45^\circ - 2A) - (45^\circ + 2A)}{2}}{2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(sen^2 A - \cos^2 A)(1 + sen A \cos A)(1 - sen A \cos A)}{2\, sen^2 A - 1}\right]^2 + \left[-sen\, 45^\circ \cdot sen(-2A)\right]^2$$

$$= \left[\frac{(2\, sen^2 A - 1)(1 - sen^2 A \cos^2 A)}{2\, sen^2 A - 1}\right]^2 + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\, sen A \cos A\right]^2$$

$$= 1 - 2\, sen^2 A \cdot \cos^2 A + sen^4 A \cdot \cos^4 A + 2\, sen^2 A \cos^2 A$$

$$= 1 + sen^4 A \cdot \cos^4 A$$

Luego el valor de la hipotenusa es $x = \sqrt{1 + sen^4 A \cdot \cos^4 A}$.

60. Demostrar que: $sen\, 54^\circ - sen\, 18^\circ = sen\, 30^\circ$.

Demostración:

$$sen\, 54^\circ - sen\, 18^\circ = 2\cos\frac{54^\circ + 18^\circ}{2} \cdot sen\frac{54^\circ\ \ 18^\circ}{2}$$

$$= 2\cos 36^\circ \cdot sen\, 18^\circ = 2\,(1 - 2\, sen^2\, 18^\circ) \cdot sen\, 18^\circ$$

$$= 2\, sen\, 18^\circ - 4\, sen^3\, 18^\circ \quad (1)$$

Para determinar el valor de $sen 18°$, hagamos

$\alpha = 18° \Rightarrow 5\alpha = 90° \Rightarrow 2\alpha + 3\alpha = 90° \Rightarrow 2\alpha = 90° - 3\alpha \Rightarrow$

$sen 2\alpha = sen(90° - 3\alpha) \Rightarrow sen 2\alpha = \cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) \Rightarrow$

$2\, sen\alpha \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - sen\alpha \cdot sen 2\alpha \Rightarrow$

$2\, sen\alpha \cos\alpha = \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha - 2\, sen^2\alpha \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$$2\, sen\alpha = \cos 2\alpha - 2 sen^2\alpha \Rightarrow$$

$$2\, sen\alpha = 1 - 2\, sen^2\alpha - 2 sen^2\alpha \Rightarrow$$

$4\, sen^2\alpha + 2\, sen\alpha - 1 = 0 \Rightarrow$

$$sen\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como, en nuestro ejercicio $\alpha = 18° \Rightarrow sen\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Luego, reemplazando este valor en (1), obtenemos:

$$sen 54° - sen 18° = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} - 4\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^3$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{(\sqrt{5}-1)^3}{16}$$

$$= \frac{8(\sqrt{5}-1) - 5\sqrt{5} + 15 - 3\sqrt{5} + 1}{16}$$

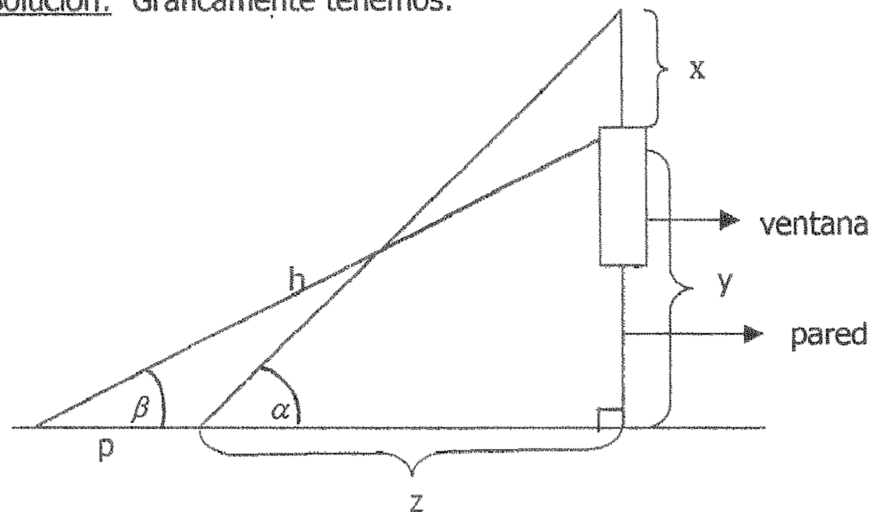
$$= \frac{8}{16} = \frac{1}{2} = sen 30°$$

$\therefore sen 54° - sen 18° = sen 30°.$

61. Una escalera está apoyada sobre la pared de una bodega formando un ángulo "α" con el plano horizontal y llegando exactamente hasta la parte superior de dicho recinto. Si el pie de la escalera se aleja de la pared "p" metros formando un ángulo "β" con el plano horizontal, y su otro extremo queda apoyado en el marco superior de una ventana de la pared, demostrar

que la distancia entre la parte superior de la pared y el marco superior de la ventana es igual a " $p \cot g \frac{\alpha+\beta}{2}$ ".

Solución: Gráficamente tenemos:



Sean : h = longitud escalera

x = distancia a demostrar

z = distancia entre la pared y el pie de la escalera

Del gráfico obtenemos:

$$tg\,\alpha = \frac{x+y}{z} \Rightarrow x+y = z\,tg\,\alpha \Rightarrow x = z\,tg\,\alpha - y \qquad (1)$$

$$tg\,\beta = \frac{y}{p+z} \Rightarrow y = (p+z)\,tg\,\beta \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), tenemos:

$$x = z\,tg\,\alpha - (p+z)\,tg\,\beta = z\,(tg\,\alpha - tg\,\beta) - p\,tg\,\beta \qquad (*)$$

Por otro lado: $\cos\alpha = \frac{z}{h} \Rightarrow h = \frac{z}{\cos\alpha} \qquad (3)$

y $\cos\beta = \frac{p+z}{h} \Rightarrow h = \frac{p+z}{\cos\beta} \qquad (4)$

Igualando (3) y (4), obtenemos:

$$\frac{z}{\cos\alpha} = \frac{p+z}{\cos\beta} \Rightarrow z\cos\beta = p\cos\alpha + z\cos\alpha \Rightarrow z = \frac{p\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

Reemplazando este valor en (*):

$$x = \frac{p\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}\left(tg\,\alpha - tg\,\beta\right) - p\,tg\,\beta$$

$$= \frac{p\,\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}\left(\frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} - \frac{sen\,\beta}{\cos\beta}\right) - p\,\frac{sen\,\beta}{\cos\beta}$$

$$= \frac{p\,\cos\alpha}{\cos\beta - \cos\alpha}\;\frac{sen\,\alpha\,\cos\beta - sen\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - p\,\frac{sen\,\beta}{\cos\beta}$$

$$= \frac{p\left(sen\,\alpha\cos\beta - sen\,\beta\cdot\cos\alpha\right)}{\cos\beta\left(\cos\beta - \cos\alpha\right)} - \frac{p\,sen\,\beta}{\cos\beta}$$

$$= p\cdot\frac{sen\,\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\beta\cdot\cos\alpha - sen\,\beta\cos\beta + sen\,\beta\cos\alpha}{\cos\beta\left(\cos\beta - \cos\alpha\right)}$$

$$= p\cdot\frac{sen\,\alpha - sen\,\beta}{\cos\beta - \cos\alpha}$$

$$= p\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}}{-2\,sen\frac{\beta+\alpha}{2}\cdot sen\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$= p\,\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{sen\frac{\alpha+\beta}{2}} = p\cdot\cot g\,\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$\therefore$ la distancia es $p\cot g\,\frac{\alpha+\beta}{2}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Si $\cot g\, A = \frac{11}{2}$, $A \in III.C.$, $tg\, B = \frac{7}{24}$, $B \in I.C.$, determinar el valor de $\cot g(A-B)$, $\sec(A+B)$. Resp.: $\frac{-278}{29}$; $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$

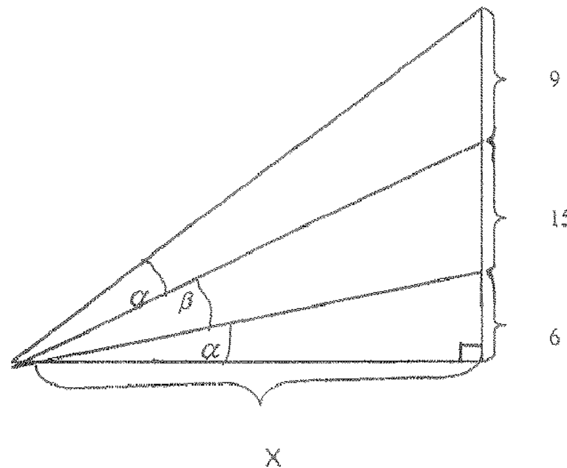
2. Determinar el valor de:

$$A = \frac{\cos^2(90°+A)\cdot sen(-A)\cdot tg(A-180°)}{sen(360°+A)\cdot sen^2(180°+A)\cdot \cot g(A-90°)}$$

Resp.: A=1

3. Simplificar: $\frac{\left[sen\left(\frac{5\pi}{2}+n\,\phi\right)+\cos(-n\phi)\right]\cdot tg\left(\frac{9\pi}{2}+\phi\right)}{2\cos(n\phi)\cdot\cos(\pi+\phi)}$, $n\in R$ Resp.: $\operatorname{cosec}\phi$

4. Determinar el valor de "x" en el siguiente triángulo:



Resp.: $x = 6\sqrt{35}$

5. Si $\cos A = -a$, $a > 0$, $A \in II.C.$, determinar el valor de :

$$T = \frac{tg(90°+A)+sen(360°-A)}{\operatorname{cosec}(180°+A)-\cot g(-A)}$$

Resp.: $T = \frac{-a^2-a+1}{1+a}$

6. Si $\cot g\,\theta = \frac{p}{q}$, $p > 0, q < 0$, determinar el valor de : $\frac{p \cdot \cos\theta - q \cdot sen\theta}{p\cos\theta + q\,sen\theta}$.

Resp.: $\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$

7. Si $\sec\alpha = -3\frac{4}{7}, \alpha \in III.C.$ y $tg\,2\beta = \frac{8}{15}$, $(2\beta) \in III.C.$, calcular el valor de:

$625\sqrt{17}\,\cos(2\alpha + \beta)$. Resp.: -837

8. Si $sen\,\alpha = \frac{5}{13}, \alpha \in I.C., sen\,\beta = \frac{4}{5}, \beta \in I.C.,$ demostrar que $sen(45° + \alpha + \beta) = \frac{79\sqrt{2}}{130}$.

9. Demostrar que: $\cot g15° + \cot g75° + \cot g135° - \cos ec30° = 1$.

10. Determinar el valor de $sen\,2\alpha$, si $sen\,\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{5}$.

Resp.: $\frac{24}{25}$

11. Si $sen\,(2x - y) = \frac{1}{2}$, $\cos(x - y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, determinar el valor de "x" y "y", sabiendo que $x \in II.C.$, y $\in I.C.$ Resp.: $x = \frac{7\pi}{12}$, $y = \frac{\pi}{3}$

12. Si los catetos de un triángulo rectángulo son $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + 2\cos(\alpha + \beta)$ y $sen\,2\alpha + sen\,2\beta + 2\,sen(\alpha + \beta)$, demostrar que la hipotenusa vale $4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}$.

13. Demostrar que: $tg\,40° + \cot g\,40° = 2\,sen\,10°$.

14. Demostrar que: $\cos^2 36 + sen^2 18° = \frac{3}{4}$ (Indicación: considerar ejercicio Nº 60).

15. Si $sen(-x) = a$, $a > 0$, $x \in III.C.$, calcular el valor de:

$$Y = \frac{sen\left(-\frac{7\pi}{2} - x\right)}{4\,tg(6\pi + x) + 8\cos ec\left(-\frac{5\pi}{2} + x\right)}$$

Resp.: $Y = \frac{a^2 - 1}{4(a + 2)}$

16. Si $sen\alpha = p,\ \alpha \in III.C.$ y $\cos\beta = q,\ \beta \in IV.C.,$ calcular el valor de $\operatorname{cosec}\beta,\ sen(\alpha+\beta),\ \cos(\alpha-\beta)$.

Resp.: $\dfrac{-1}{\sqrt{1-q^2}}$; $\sqrt{1-p^2}\cdot\sqrt{1-q^2}+pq$;
$-\left(q\sqrt{1-p^2}+p\sqrt{1-q^2}\right)$

17. Demostrar que: $3\,sen205°+\cos295° = -2\cos65°$.

18. Si $\dfrac{sen(\theta+\alpha)}{\cos(\theta-\alpha)} = \dfrac{1-m}{1+m}$, demostrar que: $tg\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right) = m\,\cot g\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

19. Si $\dfrac{sen\alpha}{sen(2\alpha+\beta)} = \dfrac{n}{m}$, demostrar que: $\cot g(\alpha+\beta) = \dfrac{m-n}{m+n}\cot g\alpha$.

20. Determinar el valor de : $\cos20° - sen10° - sen50°$.

Resp.: 0

21. Demostrar que: $\dfrac{sen75° - sen15°}{\cos75° + \cos15°} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

22. Verificar que: $\dfrac{sen3\alpha}{sen\alpha} - \dfrac{\cos3\alpha}{\cos\alpha}$ es un valor constante, independiente de α

Resp.: 2

23. Analizar la siguiente igualdad y determinar si es o no una identidad:

$$\frac{\sec^2 y - tg^2 y}{\cos\dfrac{3x+1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2} + sen\dfrac{3x+1}{2}\cdot sen\dfrac{x-1}{2}} = \sec(x+1).$$

Resp.: es identidad

24. Si $\cos\theta = \cos\alpha\cdot\cos\beta$, demostrar que:

$$tg\frac{\theta+\alpha}{2}\cdot tg\frac{\theta-\alpha}{2} = tg^2\frac{\beta}{2}.$$

25. Demostrar que:

a. $\dfrac{2\,sen\alpha\cdot\cos^2\alpha}{(1+\cos2\alpha)\cdot tg\dfrac{\alpha}{2}} = 1+\cos\alpha$

b. $tg\alpha + tg\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + tg\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = 3\, tg3\alpha$

c. $sen^2\alpha + sen^2(120°+\alpha) + sen^2(120°-\alpha) = \frac{3}{2}$

d. $sen\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\cdot\cos(\pi-\theta)\cdot\cot g\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = sen\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) sen\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)\cot g\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

e. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) - sen^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = sen2\alpha$

f. $\cos(15°-\alpha)\cdot\sec 15° - sen(15°-\alpha)\cdot\cos ec15° = 4\, sen\alpha$

g. $\cot g\theta - tg\theta = 2\cot g2\theta$

h. $tg\theta + 2tg2\theta + 4tg4\theta = \cot g\theta - 8\cot g8\theta$

(Indicación : aplicar g.)

i. $\dfrac{1+\cos\theta+\cos\frac{\theta}{2}}{sen\,\theta + sen\,\frac{\theta}{2}} = \cot g\frac{\theta}{2}$

j. $\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha = \cos^4\alpha$

k. $(tg\alpha + \sec\alpha)\cot g\frac{\alpha}{2} = (\cot g\alpha + \cos ec\alpha)\, tg\left(45° + \frac{\alpha}{2}\right)$

l. $\cot g(15°-\alpha) + tg(15°+\alpha) = \dfrac{4\cos 2\alpha}{1 - sen2\alpha}$

m. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + sen^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1 - sen2x$

CAPITULO III

EJERCICIOS QUE INVOLUCRAN FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

Recordemos que las funciones trigonométricas inversas están definidas como:

$arc\,sen: [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$arc\cos: [-1, 1] \to [0, \pi]$

$arc\,tg: R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$arc\cos ec: R - (-1, 1) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

$arc\sec: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$arc\cot g: R \to (0, \pi)$

A continuación enfrentaremos una serie de ejercicios, considerando los dominios y recorridos establecidos anteriormente.

1. Determinar el valor de:

$$A = arc\,tg\,1 - 3\,arc\,sen\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\,arc\cos\frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Solución: **Debemos tener presente que** $arc\,tg\,1, arc\,sen\frac{\sqrt{2}}{2}$ **y** $arc\cos\frac{-\sqrt{3}}{2}$ **representan ángulos, es decir, el resultado que obtengamos debe ser un ángulo. Interpretando cada término de la expresión dada, tenemos:**

Sea $\alpha = arc\,tg\,1 \Rightarrow tg\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$, **ya que** $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\beta = arc\,sen\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow sen\,\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}, \text{ ya que } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\gamma = arc\cos\frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{5\pi}{6}, \text{ ya que } \gamma \in [0, \pi]$$

$$\therefore\ A = \frac{\pi}{4} - 3\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5\pi}{6} = \frac{-\pi}{12}$$

2. Determinar el valor de $sen(arc\ sen\ p)$, $p \in [-1, 1]$

<u>Solución:</u> Como $arc\,sen\,p$ representa un ángulo, hagamos $\alpha = arc\,sen\,p \Rightarrow sen\,\alpha = p$

$\therefore$ si sustituímos en la expresión dada, obtenemos:

$$sen(arc\ sen\ p) = sen\,\alpha = p$$

En general, esto sucede siempre para expresiones del tipo $\cos(arc\cos q)$, $tg(arc\,tg\,q)$, $\operatorname{cosec}(arc\operatorname{cosec} q)$, $\sec(arc\sec q)$ **y** $\cot g(arc\cot g\,q)$, **estando q definido en el dominio que le corresponda.**

3. Demostrar que $arc\operatorname{cosec} u = arc\,sen\frac{1}{u}$, $u \in R - (-1,1)$.

<u>Demostración:</u>

Sea $\alpha = arc\operatorname{cosec} u$ (1) $\Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = u \Rightarrow$

$$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \frac{1}{u} \Rightarrow sen\,\alpha = \frac{1}{u} \Rightarrow \alpha = arc\,sen\frac{1}{u} \quad (2)$$

De (1) y (2) : $arc\operatorname{cosec} u = arc\,sen\frac{1}{u}$

En general esta igualdad es válida para aquellas de la forma:

$$arc\ sen\frac{a}{b} = arc\ \operatorname{cosec}\frac{b}{a}$$

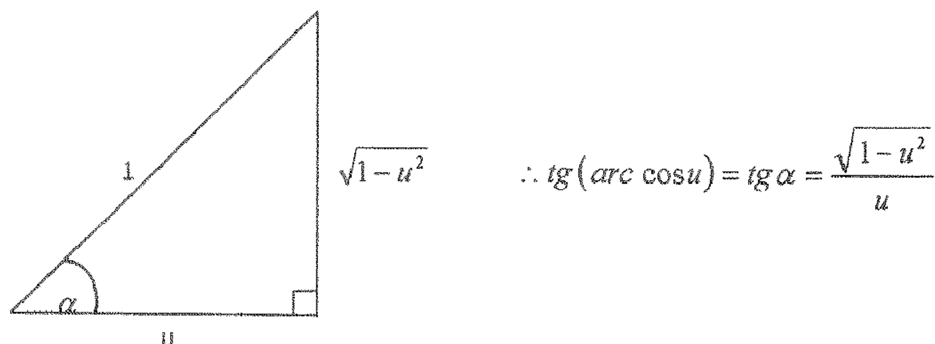
$$arc\ \cos\cdot\frac{a}{b} = arc\ \sec\frac{b}{a}$$

$$arc\ tg\ \frac{a}{b} = arc\ \cot g\frac{b}{a}$$

4. Determinar el valor de:

a. $tg\,(\,arc\cos u)$

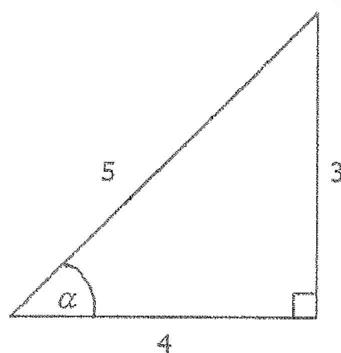
<u>Solución:</u> Sea $\alpha = arc\cos u \Rightarrow \cos\alpha = u \Rightarrow$



$$\therefore\ tg\,(arc\cos u) = tg\,\alpha = \frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$$

b. $\cos\left(arc\ sen\dfrac{3}{5}\right)$

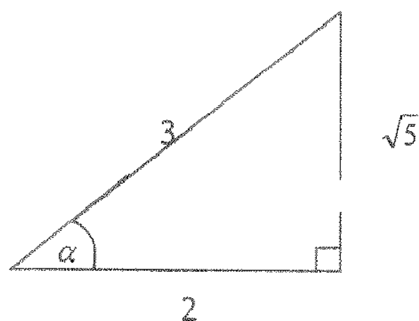
<u>Solución:</u> Sea $\alpha = arc\,sen\dfrac{3}{5} \Rightarrow sen\,\alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow$



$$\therefore\ \cos\left(arc\ sen\frac{3}{5}\right) = \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

c. $sen\left(arc\cos -\dfrac{2}{3}\right)$

<u>Solución:</u> Sea $\alpha = arc\cos\dfrac{-2}{3} \Rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha \in II.C.$ Luego:



$$sen\left(arc\cos \frac{-2}{3}\right) = sen\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

d. $arc\,sen\left(sen\frac{-\pi}{3}\right)$

Solución: $arc\ sen\left(sen - \frac{\pi}{3}\right) = arc\ sen\left(- sen\frac{\pi}{3}\right) =$

$arc\ sen\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Sea $\alpha = arc\ sen\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$sen\,\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ arc\ sen\left(sen\ \frac{-\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

e. $arc\cos\left(tg\frac{5\pi}{4}\right)$

Solución: $arc\cos\left(tg\frac{-5\pi}{4}\right) = arc\cos\left(-tg\frac{5\pi}{4}\right) = arc\cos(-1)$. Sea

$$\alpha = arc\ \cos(-1) \Rightarrow \cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$\therefore\ arc\ \cos\left(tg\ \frac{-5\pi}{4}\right) = \pi$$

f. $\cot g\left(arc\ cosec 2\right)$

Solución: Sea $\alpha = arc\,cosec 2 \Rightarrow cosec\,\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

$$\cot g\left(arc\,cosec\ 2\right) = \cot g\,\alpha = \cot g\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

Otra forma:

$$\cot g\left(arc\,cosec\ 2\right) = \cot g\left(arc\,sen\frac{1}{2}\right) = \cot g\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

5. Determinar el valor de:

$$tg\left(arc\ sen\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\ arc\ \cot g\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$$

Solución:

Sea $\alpha = arc\,sen\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow sen\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{6}$, ya que $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\therefore tg\,\alpha = tg\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -tg\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

$$\beta = arc\cot g\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = arc\,tg\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \Rightarrow tg\,\beta = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = 2-\sqrt{3} \qquad (2)$$

Luego tenemos:

$$tg(\alpha+2\beta) = \frac{tg\alpha + tg2\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,2\beta} = \frac{tg\alpha + \frac{2tg\,\beta}{1-tg^2\beta}}{1 - tg\,\alpha\cdot\frac{2tg\,\beta}{1-tg^2\beta}}$$

Sustituyendo (1) y (2):

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{1-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right)} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{-6+4\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{-6+4\sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}}}{1+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\left(-3+2\sqrt{3}\right)}} = \frac{3-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{-3\sqrt{3}+6+2-\sqrt{3}} = \frac{0}{8-4\sqrt{3}} = 0$$

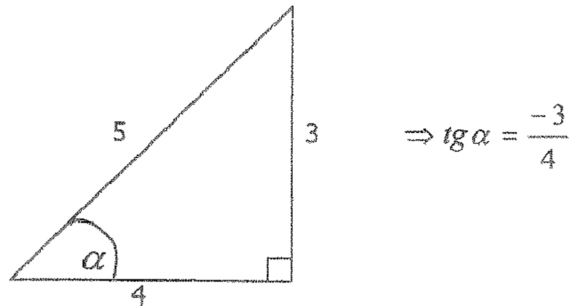
$$\therefore tg\left(arc\,sen\left(-\frac{1}{2}\right) + 2arc\cot g\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) = 0$$

6. Determinar el valor de:

$$tg\left(arc\,sen\frac{-3}{5} - arc\cos\frac{5}{13}\right).$$

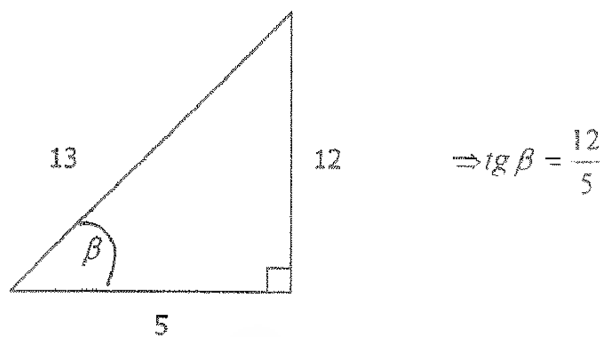
Solución:

Sea $\alpha = arc\ sen\frac{-3}{5} \Rightarrow sen\alpha = \frac{-3}{5} \Rightarrow \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right] \Rightarrow$



$\Rightarrow tg\alpha = \frac{-3}{4}$

Sea $\beta = arc\cos\frac{5}{13} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{13} \Rightarrow \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$



$\Rightarrow tg\beta = \frac{12}{5}$

Luego: $tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{12}{5}}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\frac{12}{5}} = \frac{-63}{-16} = \frac{63}{16}$

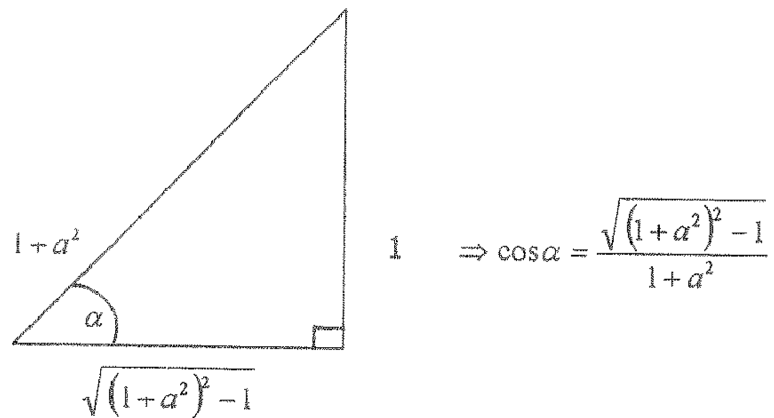
$\therefore tg\left(arc\,sen\frac{-3}{5} - arc\cos\frac{5}{13}\right) = \frac{63}{16}$

7. Determinar el valor de:

$$y = sen\left(arc\,sen\frac{1}{1+a^2} + arc\ \cos\frac{1}{1+a^2}\right).$$

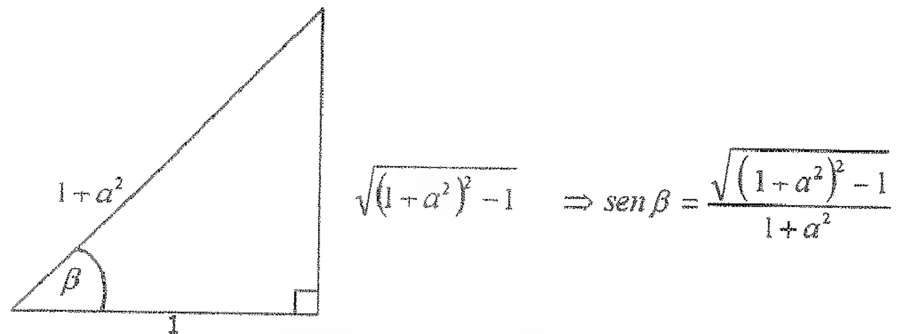
Solución:

Sea $\alpha = arc\,sen\frac{1}{1+a^2} \Rightarrow sen\alpha = \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$



$$\beta = arc\cos\frac{1}{1+a^2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow \beta \in \left[\ 0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow$



Luego tenemos: $y = sen(\alpha+\beta) = sen\,\alpha\,\cos\beta + sen\,\beta\cdot\cos\alpha$

Sustituyendo los valores correspondientes, obtenemos:

$$= \frac{1}{1+a^2}\cdot\frac{1}{1+a^2} + \frac{\sqrt{(1+a^2)^2-1}}{1+a^2}\cdot\frac{\sqrt{(1+a^2)^2-1}}{1+a^2} =$$

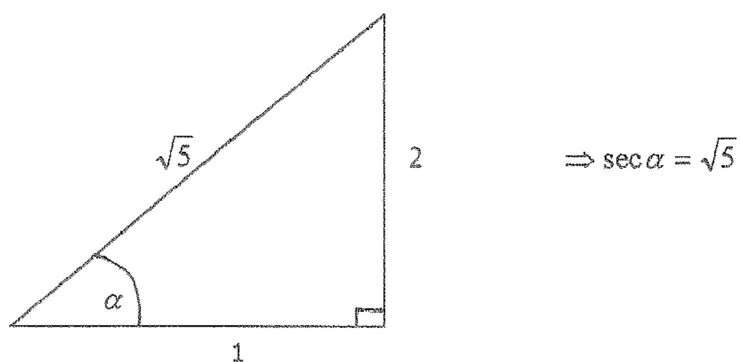
$$= \frac{1+a^4+2\,a^2}{(1+a^2)^2} = \frac{(1+a^2)^2}{(1+a^2)^2} = 1$$

$\therefore\ y = 1$

8. Demostrar que: a) $\sec^2\left(arctg\,2\right)+\operatorname{cosec}^2\left(arc\,\cot g\,3\right)=15.$

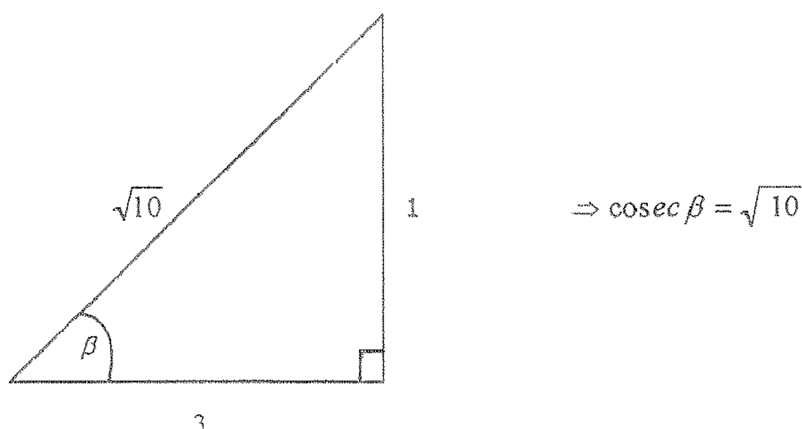
Demostración:

Sea $\alpha = arc\,tg\,2 \Rightarrow tg\,\alpha = 2 \Rightarrow \alpha \in \left[\,0, \dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$



$\Rightarrow \sec\alpha = \sqrt{5}$

Sea $\beta = arc\cot g\,3 \Rightarrow \cot g\,\beta = 3 \Rightarrow \beta \in \left(\,0, \dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$



$\Rightarrow \operatorname{cosec}\beta = \sqrt{10}$

$$\therefore\ \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\beta = \left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{10}\right)^2 = 15$$

b) $arc\,sen\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) + arc\,\cos\left(-\dfrac{1}{2}\right) + arc\,tg\left(-1\right) = \dfrac{\pi}{12}.$

Demostración:

Sea $\alpha = arc\,sen\dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow sen\,\alpha = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = -\dfrac{\pi}{3}$, ya que $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\beta = arc\cos\frac{-1}{2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}\text{, ya que } \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\gamma = arctg(-1) \Rightarrow tg\gamma = -1 \Rightarrow \gamma = -\frac{\pi}{4}\text{, ya que } \gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$$

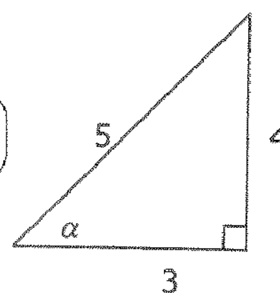
$$\therefore \alpha + \beta + \gamma = -\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore arc\ sen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + arc\ tg(-1) = \frac{\pi}{12}$$

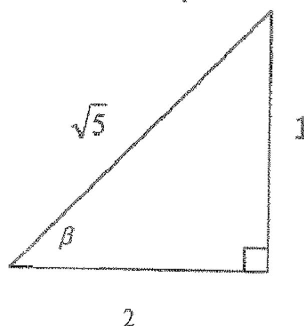
c) $arctg\frac{4}{3} + arc\cos\frac{-2}{\sqrt{5}} = \pi + arctg\frac{1}{2}$

Demostración:

Sea $\alpha = arctg\frac{4}{3} \Rightarrow tg\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$



$$\beta = arc\cos\frac{-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \beta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



$\Rightarrow tg\ \beta = \frac{-1}{2}$

$$\therefore arc\ tg\frac{4}{3} + arc\cos\frac{-2}{\sqrt{5}} = \alpha + \beta \qquad (1)$$

Para demostrar una igualdad de ángulos desconocidos necesitamos aplicarle, previamente, alguna función trigonométrica. A pesar de poder aplicar cualquiera de ellas, siempre habrá una más conveniente.

En este caso, el lado derecho de la igualdad nos indica en (1) nos conviene aplicar la función tangente, es decir:

$$tg\left(arc\,tg\frac{4}{3}+arc\cos\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)=tg\,(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}\quad=$$

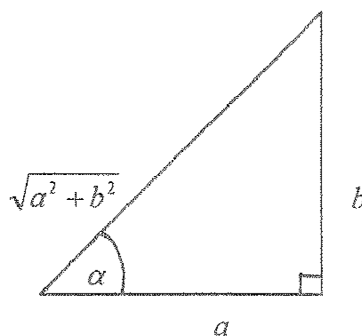
$$=\frac{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}=tg\left(arc\,tg\frac{1}{2}\right)=tg\left(\pi+arc\,tg\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ arc\ tg\frac{4}{3}+arc\cos\frac{-2}{\sqrt{5}}=\pi+arc\ tg\frac{1}{2}$$

d) $2\ arc\ tg\frac{b}{a}=arc\cos\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\ a,b\in R^{+},\ \ a>b.$

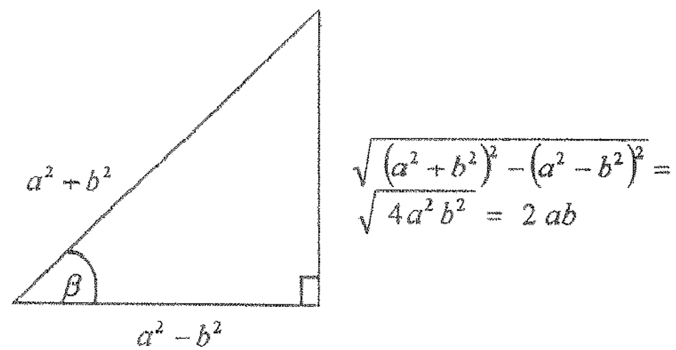
<u>Demostración:</u> Otra forma de enfrentar estas demostraciones es la siguiente:

Sea $\alpha=arc\,tg\frac{b}{a}\Rightarrow tg\,\alpha=\frac{b}{a}\Rightarrow\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$



$$\Rightarrow\ \begin{array}{l} sen\,\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{array}$$

$$\beta=arc\cos\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\Rightarrow\cos\beta=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\quad(1)\quad\Rightarrow\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow$$



$\therefore$ la igualdad a demostrar es de la forma $2\alpha = \beta$. Aplicándole alguna función como coseno, obtenemos $\cos 2\alpha = \cos\beta$

Luego: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$$= \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

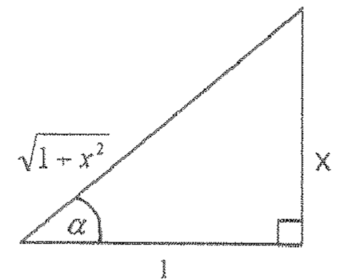
$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} = \cos\beta$$, de acuerdo a (1)

$\therefore \cos 2\alpha = \cos\beta$, de donde $2\, arc\, tg \frac{b}{a} = arc\, \cos\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

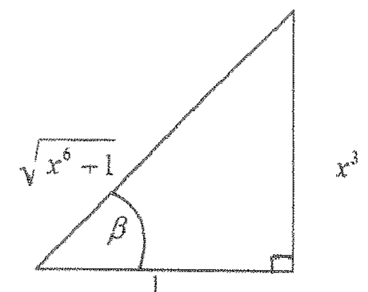
e) $tg\,(2\, arc\, tg\, x) = 2\, tg\,(arc\, tg\, x + arc\, tg\, x^3)$, $x \geq 0$.

<u>Demostración:</u>

Sea $\alpha = arc\, tg\, x \Rightarrow tg\,\alpha = x \Rightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$



$\beta = arc\, tg\, x^3 \Rightarrow tg\,\beta = x^3 \Rightarrow \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$



Partiendo del lado derecho de la igualdad, tenemos:

$$2\,tg\left(arc\ tg\,x + arc\,tg\,x^3\right) = 2\,tg\left(\alpha + \beta\right) = 2\cdot\frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\cdot tg\,\beta} =$$

$$2\cdot\frac{x + x^3}{1 - x\cdot x^3} = \frac{2\left(x + x^3\right)}{1 - x^4} = \frac{2x\left(1 + x^2\right)}{\left(1 - x^2\right)\left(1 + x^2\right)} = \frac{2x}{1 - x^2} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = tg\,2\alpha$$

$$= tg\left(2\ arc\ tg\ x\right)$$

$$\therefore\ 2\,tg\left(arc\,tg\,x + arc\ tg\,x^3\right) = tg\left(2\ arc\,tg\,x\right).$$

f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$, si $arc\ \cos x + arc\ \cos y + arc\ \cos z = \pi$.

Demostración:

Como $arc\ \cos x + arc\cos y + arc\cos z = \pi \Rightarrow$

$arc\ \cos x = \pi - arc\ \cos y - arc\cos z$

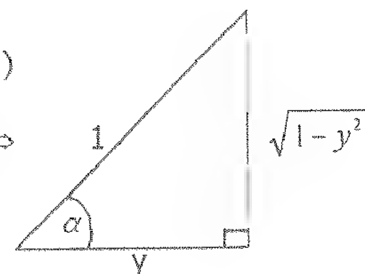
Aplicando la función coseno obtenemos:

$$\cos\left(arc\cos x\right) = \cos\left(\pi - \left(arc\cos y + arc\cos z\right)\right) \Rightarrow$$

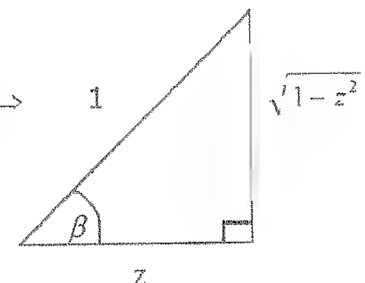
$$x = -\cos\left(arc\cos y + arc\cos z\right) \Rightarrow$$

$$-x = \cos\left(arc\cos y + arc\cos z\right)\quad (1)$$

Sea $\alpha = arc\cos y \Rightarrow \cos\alpha = y \Rightarrow \alpha \in I.C \Rightarrow$



$\beta = arc\ \cos z \Rightarrow \cos\beta = z \Rightarrow \beta \in I.C \Rightarrow$



$$\therefore\ \cos\left(arc\ \cos y + arc\ \cos z\right) = \cos\left(\alpha + \beta\right) =$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\alpha\cdot sen\,\beta = y\cdot z - \sqrt{1 - y^2}\cdot\sqrt{1 - z^2}$$

Reemplazando en (1):

$$x = y \cdot z - \sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-z^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-z^2} = x + y \cdot z$$

Elevamos al cuadrado, obteniendo:

$$(1-y^2)(1-z^2) = x^2 + 2xyz + y^2 z^2 \Rightarrow$$

$$1 - z^2 - y^2 + y^2 z^2 = x^2 + 2xyz + y^2 z^2 \Rightarrow$$

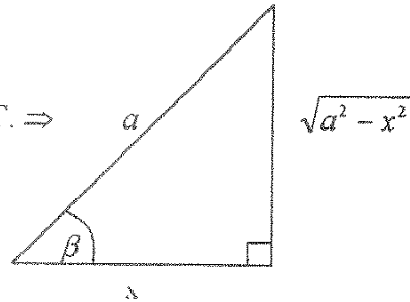
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$$

g) $sen^2\alpha = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2}$, si $\alpha = arc\cos\frac{x}{a} + arc\cos\frac{y}{b}$.

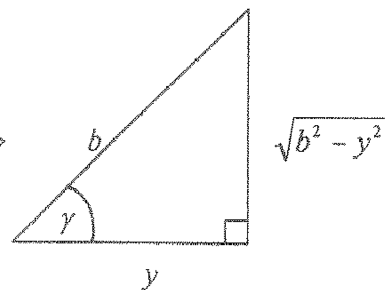
Demostración:

Como $\alpha = arc\cos\frac{x}{a} + arc\cos\frac{y}{b}$,

$\beta = arc\cos\frac{x}{a} \Rightarrow \cos\beta = \frac{x}{a} \Rightarrow \beta \in I\,C. \Rightarrow$



$\gamma = arc\cos\frac{y}{b} \Rightarrow \cos\gamma = \frac{y}{b} \Rightarrow \gamma \in I.C. \Rightarrow$



$\therefore\ \alpha = \beta + \gamma$

Aplicamos la función seno y luego coseno:

$$sen\alpha = sen(\beta + \gamma) = sen\beta \cdot \cos\gamma + sen\gamma \cdot \cos\beta$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} \cdot \frac{x}{a}$$

$$= \frac{y\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{b^2 - y^2}}{a \cdot b} \quad (1)$$

$$\cos\alpha = \cos(\beta + \gamma) = \cos\beta \cdot \cos\gamma - sen\,\beta \cdot sen\gamma$$

$$= \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \cdot \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}$$

$$= \frac{xy - \sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{b^2 - y^2}}{ab} \quad (2)$$

Elevando (1) al cuadrado, obtenemos:

$$sen^2\,\alpha = \left(\frac{y\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{b^2 - y^2}}{ab}\right)^2 = \frac{y^2(a^2 - x^2) + 2xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{b^2 - y^2} + x^2(b^2 - y^2)}{a^2b^2}$$

$$= \frac{y^2a^2 - y^2x^2 + 2xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{b^2 - y^2} + x^2b^2 - x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$= \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{2xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{b^2 - y^2} - 2x^2y^2}{a^2b^2}$$

$$= \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{2xy}{ab}\left(\frac{\sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{b^2 - y^2} - xy}{ab}\right)$$

$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\left(\frac{xy - \sqrt{a^2 - x^2}\,\sqrt{b^2 - y^2}}{ab}\right), \text{ de } (2) \Rightarrow$$

$$= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha$$

$$\therefore sen^2\,\alpha = \frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2}$$

h) $arc\cos\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x} = 2\,arctg\left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \cdot tg\,\dfrac{x}{2}\right)$

Demostración:

Sea $\alpha = 2\,arc\,tg\left(\sqrt{\dfrac{a - b}{a + b}} \cdot tg\dfrac{x}{2}\right)$ (1) $\Rightarrow$

$$\frac{\alpha}{2} = arc\,tg\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot tg\,\frac{x}{2}\right).$$ Aplicamos tangente $\Rightarrow$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot tg\,\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},$$ elevando al cuadrado $\Rightarrow$

$$\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{a-a\cos x-b+b\cos x}{a+a\cos x+b+b\cos x} \Rightarrow$$

$$a+a\cos x+b+b\cos x-a\cos\alpha-a\cos x\cos\alpha-b\cos\alpha-b\cos\alpha\cos x =$$

$$a-a\cos x-b+b\cos x+a\cos\alpha-a\cos x\cos\alpha-b\cos\alpha+b\cos\alpha\cos x$$

Eliminando términos semejantes nos queda:

$$2a\cos x - 2a\cos\alpha - 2b\cos\alpha\cos x + 2b = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{a\cos x+b}{a+b\cos x} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right) \quad (2)$$

De (1) y (2), obtenemos que:

$$arc\cos\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x} = 2\,arc\,tg\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot tg\,\frac{x}{2}\right)$$

i) $arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = arc\,tg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$, $x, y \geq 0$

<u>Demostración:</u>

Sea $\alpha = arc\,tg\,x \Rightarrow tg\,\alpha = x \Rightarrow \quad \alpha \in I.C.$

$\beta = arc\,tg\,y \Rightarrow tg\,\beta = y \Rightarrow \beta \in I.C.$

$\therefore\ arc\,tg\,x + arc\,tg\,y = \alpha + \beta$

Aplicamos la función tangente $\Rightarrow$

$$tg(\,arc\,tg\,x + arc\,tg\,y) = tg\,(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$$= \frac{x + y}{1 - xy}$$

$$\therefore arc\ tg\ x + arc\ tg\ y = arc\ tg\ \frac{x + y}{1 - xy}$$

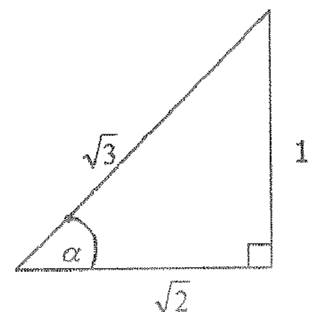
Como consecuencia de esta identidad también es válido que:

$$arc\ tg\ x - arc\,tg\ y = arc\,tg \frac{x - y}{1 + xy}$$

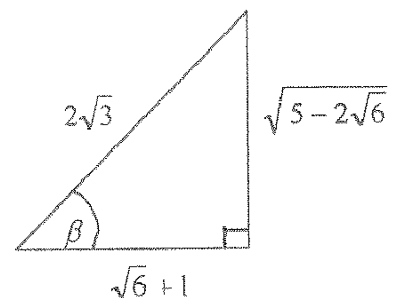
j) $arc\ \cos\sqrt{\frac{2}{3}} - arc\ \cos\frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

<u>Demostración:</u>

Sea $\alpha = arc\ \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha \in I.C. \Rightarrow$



$\beta = arc\cos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \beta \in I.C. \Rightarrow$



Luego $arc\cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - arc\ \cos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \alpha - \beta$

Aplicamos la función coseno:

$$\cos\left(arc\ \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - arc\ \cos\frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} \right) = \cos(\alpha - \beta)$$

$$= \cos\,\alpha \cdot \cos\beta + sen\,\alpha \cdot sen\,\beta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6} + 1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{6}+1\right)+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{6}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ arc\ \cos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - arc\ \cos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

9. Si $u = arc\ \cot g\ \sqrt{\cos\alpha} - arc\ tg\sqrt{\cos\alpha}$, $\alpha \in I.C.$, demostrar que $sen u = tg^2\frac{\alpha}{2}$.

Demostración:

Sea $\beta = arc\ \cot g\sqrt{\cos\alpha} \Rightarrow \cot g\,\beta = \sqrt{\cos\alpha} \Rightarrow$

$\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$ $\sqrt{\cos\alpha+1}$ β $1 \Rightarrow$ $\sqrt{\cos\alpha}$

$$sen\,\beta = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha+1}}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{\cos\alpha+1}}$$

Sea $\gamma = arc\ tg\sqrt{\cos\alpha} \Rightarrow tg\gamma = \sqrt{\cos\alpha} \Rightarrow \gamma \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$

$\sqrt{1+\cos\alpha}$ γ $\sqrt{\cos\alpha}$ 1 $\Rightarrow$

$$sen\gamma = \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\cos\alpha}}$$

$$\therefore\ sen\ u = sen\left(\beta-\gamma\right) = sen\ \beta\ \cos\gamma - sen\gamma\ \cos\beta$$

Sustituyendo obtenemos:

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\cos\alpha}} - \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{\cos\alpha+1}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{sen^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\ sen\ u = tg^2\frac{\alpha}{2}$$

A continuación resolveremos ecuaciones que involucran funciones trigonométricas inversas, lo que significa que deberemos encontrar el o los valores de la variable que la satisfacen.

10. Resolver:

a) $arc\ sen\,x = \frac{\pi}{6}$

Solución: Si $arc\ sen\ x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow sen\ \frac{\pi}{6} = x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Luego el conjunto solución es: $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

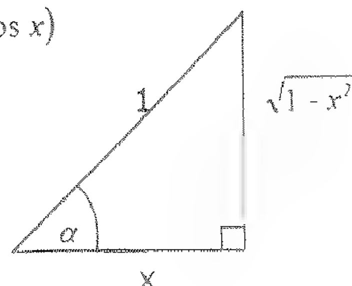
b) $arc\ sen\,x = arc\ \cos x$

Solución: Si en $arc\ sen\,x = arc\ \cos x$, aplicamos la función seno, obtenemos:

$$sen(arc\ sen\,x) = sen(arc\ \cos x) \Rightarrow$$

$$x = sen(arc\ \cos\ x)$$

Sea $\alpha = arc\cos x \Rightarrow \cos\alpha = x \Rightarrow$



$\therefore x = sen\,(\,arc\,\cos x) = sen\,\alpha = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow$

$x = \sqrt{1-x^2}$, elevamos al cuadrado

$x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

<u>Comprobación:</u>

i) Si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $arc\ sen\frac{1}{\sqrt{2}} = arc\ \cos\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$, verdadero.

ii) Si $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $arc\ sen\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = arc\ \cos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$, falso.

$\therefore S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

c) $arc\cos\left(2x^2-1\right) = 2\ arc\ \cos\frac{1}{2}$

<u>Solución:</u> Como $arc\ \cos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$arc\cos\left(2x^2-1\right) = 2\cdot\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{2\pi}{3} = 2x^2 - 1 \Rightarrow$

$-\frac{1}{2} = 2x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

<u>Comprobación:</u>

i) Si $x = \frac{1}{2} \Rightarrow arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, verdadero.

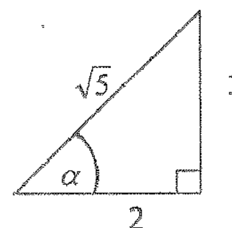
ii) Si $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow arc\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, verdadero.

$\therefore S = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

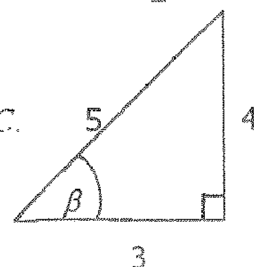
d) $2\,arc\,tg\frac{1}{2}+arc\,\cos\frac{3}{5}=arc\,sen\frac{1}{x}$

Solución:

Sea $\alpha = arc\,tg\frac{1}{2} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \in I.C. \Rightarrow$



$\beta = arc\cos\frac{3}{5} \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta \in I.C.$



$\therefore\ 2\alpha+\beta = arc\,sen\frac{1}{x}$

Aplicamos la función seno, es decir:

$$\frac{1}{x} = sen(2\alpha+\beta) = sen\,2\alpha\cdot\cos\beta + sen\,\beta\cdot\cos 2\alpha$$

$$= 2\,sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + sen\,\beta\left(\cos^2\alpha - sen^2\alpha\right)$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{12}{25}+\frac{12}{25}=\frac{24}{25}\Rightarrow$$

$$x=\frac{25}{24}$$

Como estos valores no involucran ángulos conocidos deberemos hacer la comprobación mediante la calculadora.

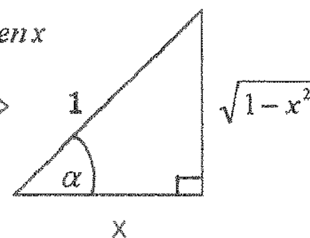
$$\therefore\ S=\left\{\frac{25}{24}\right\}.$$

e) $arc\,sen\,x + arc\,sen(1-x) = arc\,\cos x$

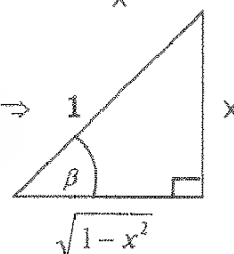
Solución: Nos conviene expresar la ecuación como:

$$arc\,sen(1-x) = arc\cos x - arc\,sen\,x$$

Sea $\alpha = arc\cos x \Rightarrow \cos\alpha = x \Rightarrow \alpha \in I.C. \Rightarrow$



$\beta = arc\,sen\,x \Rightarrow sen\,\beta = x \Rightarrow \beta \in I.C. \Rightarrow$



$\therefore\ arc\,sen(1-x) = \alpha - \beta$. Aplicamos la función seno:

$$1-x = sen(\alpha-\beta) = sen\,\alpha\cdot\cos\beta - sen\,\beta\cdot\cos\alpha$$

$$1-x = \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2} - x\cdot x$$

$$1-x = 1-x^2-x^2$$

$$2x^2 - x = 0 \quad\Rightarrow\quad x(2x-1) = 0 \quad\Rightarrow$$

$$x = 0\ ,\quad x = \frac{1}{2}$$

Comprobación:

i) Si $x = 0 \Rightarrow arc\,sen\,0 + arc\,sen\,1 = arc\cos 0 \Rightarrow 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, verdadero.

ii) Si $x = \frac{1}{2} \Rightarrow arc\,sen\frac{1}{2} + arc\,sen\frac{1}{2} = arc\cos\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, verdadero.

$$\therefore S = \left\{0, \frac{1}{2}\right\}.$$

f) $arc\ tg\ \dfrac{x-1}{x-2} + arc\,tg\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$

Solución: Utilizando la identidad 8. i) anterior, obtenemos:

$$arc\,tg\dfrac{\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x+2}}{1-\dfrac{x-1}{x-2}\cdot\dfrac{x+1}{x+2}} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$arc\ tg\ \dfrac{\dfrac{x^2+x-2+x^2-x-2}{(x-2)(x+2)}}{\dfrac{x^2-4-x^2+1}{(x-2)(x+2)}} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\dfrac{2x^2-4}{-3} = tg\dfrac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow 2x^2-4=-3 \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$$

Comprobación: Mediante calculadora.

$$\therefore\ S = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right\}.$$

g) $arc\,tg\dfrac{x-1}{x+1} + arc\,tg\ \dfrac{2x-1}{2x+1} = arc\ tg\ \dfrac{23}{36}$

Solución: Utilizando la identidad 8. i) anterior, obtenemos:

$$arc\ tg\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2x-1}{2x+1}}{1-\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{2x-1}{2x+1}} = arc\ tg\dfrac{23}{36}$$

Aplicando la función tangente, obtenemos:

$$\dfrac{\dfrac{2x^2-x-1+2x^2+x-1}{(x+1)(2x+1)}}{\dfrac{2x^2+3x+1-2x^2+3x-1}{(x+1)(2x+1)}} = \dfrac{23}{36} \Rightarrow$$

$$\dfrac{4x^2-2}{6x} = \dfrac{23}{36} \Rightarrow 72x^2-69x-36=0 \Rightarrow$$

$$24x^2-23x-12=0 \Rightarrow (8x+3)(3x-4)=0 \Rightarrow$$

$x = -\frac{3}{8}, \; x = \frac{4}{3}$

Comprobación:

i) Si $x = -\frac{3}{8}$: $arc\,tg\left(-\frac{11}{5}\right) + arc\,tg(-7) = arc\,tg\frac{23}{26}$, falso ya que $arc\,tg\left(-\frac{11}{5}\right)$ y $arc\,tg(-7)$ son ángulos negativos y $arc\,tg\frac{23}{26}$ es ángulo positivo.

ii) Si $x = \frac{4}{3}$, empleando la calculadora es verdadero.

$\therefore \; S = \left\{\frac{4}{3}\right\}.$

h) $(tg\,\alpha)^{arc\;sen\,x} = (\cot g\,\alpha)^{\frac{\pi}{2}} \cdot (\cot g\,\alpha)^{arc\,sen(\sqrt{2}\;x)}$

Solución:

$(tg\,\alpha)^{arc\;sen\,x} = (\cot g\,\alpha)^{-\frac{\pi}{2} + arc\,sen(\sqrt{2}\;x)}$

$(tg\,\alpha)^{arc\;sen\,x} = \left[(tg\,\alpha)^{-1}\right]^{-\frac{\pi}{2} + arc\;sen(\sqrt{2}\;c)}$

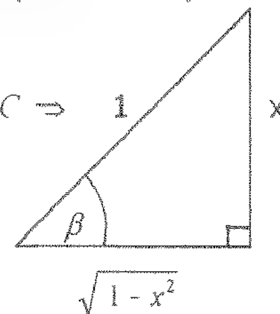
$(tg\,\alpha)^{arc\,sen\,x} = (tg\,\alpha)^{\frac{\pi}{2} - arc\,sen(\sqrt{2}\;x)}$

Deducimos que:

$$arc\,sen\,x = \frac{\pi}{2} - arc\;sen\left(\sqrt{2}\;x\right) \quad \text{ó} \quad arc\,sen\left(\sqrt{2}\;x\right) = \frac{\pi}{2} - arc\,sen\,x \quad (1)$$

Aplicamos la función seno: $\sqrt{2}\;x = sen\left(\frac{\pi}{2} - arc\,sen\,x\right) = \cos(arcsen\,x)$

Sea $\beta = arc\;sen\,x \Rightarrow sen\,\beta = x \Rightarrow \beta \in I.C \Rightarrow$



$\therefore \; \sqrt{2}\;x = \cos\beta \Rightarrow \sqrt{2}\;x = \sqrt{1 - x^2}$

Elevamos al cuadrado, obteniendo:

$$2x^2 = 1 - x^2 \;\Rightarrow 3x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

<u>Comprobación:</u> sustituyendo en (1):

i) Si $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$: $arc\ sen\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2} - arcsen\frac{1}{\sqrt{3}}$, verdadero

ii) Si $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$: $arc\ sen\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{2} - arc\ sen\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, falso

$$\therefore S = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

i) $arc\ sen\frac{2a}{1+a^2} + arc\,tg\frac{2x}{1-x^2} = arc\cos\frac{1-b^2}{1+b^2},\ a,\ b \in (0,1)$

<u>Solución:</u> Aplicando la función coseno, obtenemos:

$$\cos\left(arc\ sen\frac{2a}{1+a^2} + arc\ tg\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{1-b^2}{1+b^2}$$

Sea $\alpha = arc\ sen\frac{2a}{1+a^2} \Rightarrow sen\,\alpha = \frac{2a}{1+a^2} \Rightarrow$

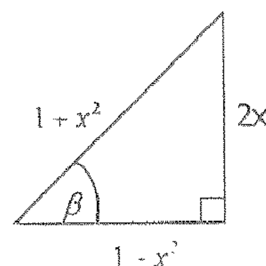
$1 + a^2$

$2a$

α

$1 \quad a^2$

$$\beta = arc\ tg\ \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow tg\ \beta = \frac{2x}{1-x^2} \Rightarrow$$



$$\therefore \frac{1-b^2}{1+b^2} = \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - sen\ \alpha\cdot sen\,\beta$$

$$\frac{1-b^2}{1+b^2} = \frac{1-a^2}{1+a^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{2a}{1+a^2}\cdot\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1-b^2}{1+b^2} = \frac{1-x^2-a^2+a^2x^2-4ax}{1+x^2+a^2+a^2x^2} \Rightarrow$$

$$1+x^2+a^2+a^2x^2-b^2-b^2x^2-b^2a^2-b^2a^2x^2 = 1-x^2-a^2+a^2x^2-4ax+b^2-b^2x^2$$

$$-a^2b^2+a^2b^2x^2-4ab^2x \Rightarrow$$

$$\left(2-2a^2b^2\right)x^2+\left(4ab^2+4a\right)x+2a^2-2b^2=0 \Rightarrow$$

$$\left(1-a^2b^2\right)x^2+2\left(ab^2+a\right)x+a^2-b^2=0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-2\left(ab^2+a\right)\pm\sqrt{4\left(ab^2+a\right)^2-4\left(1-a^2b^2\right)\left(a^2-b^2\right)}}{2\left(1-a^2b^2\right)}$$

$$= \frac{-\left(ab^2+a\right)\pm\sqrt{a^2b^4+2a^2b^2+a^2-a^2+b^2+a^4b^2-a^2b^4}}{1-a^2b^2}$$

$$= \frac{-\left(ab^2+a\right)\pm\sqrt{a^4b^2+2a^2b^2+b^2}}{1-a^2b^2}$$

$$= \frac{\left(ab^2+a\right)\pm b\sqrt{a^4+2a^2+1}}{a^2b^2-1} = \frac{\left(ab^2+a\right)\pm b\sqrt{\left(a^2+1\right)^2}}{a^2b^2-1}$$

$$= \frac{\left(ab^2+a\right)\pm b\left(a^2+1\right)}{a^2b^2-1}$$

$$\therefore \quad x = \frac{ab^2+a+ba^2+b}{a^2b^2-1} = \frac{\left(ab+1\right)\left(b+a\right)}{\left(ab-1\right)\left(ab+1\right)} = \frac{b+a}{ab-1}$$

$$x = \frac{ab^2+a-ba^2-b}{a^2b^2-1}$$

Como las soluciones están en función de las constantes "a" y "b" , no podemos comprobarlas. Asignándole a "a" y a "b" determinados valores podríamos comprobarlas con la calculadora.

$$S = \left\{ \frac{a+b}{ab-1}, \frac{ab^2+a+a^2b-b}{a^2b^2-1} \right\}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1.- Determinar el valor de:

a) $arc\ tg\ \frac{1}{7} + arc\ tg\ \frac{1}{8} + arc\,tg\ \frac{1}{18}$ Resp.: $arc\ \cot g\, 3$

b) $arc\ sen\ \frac{4}{5} + arc\ \cos\ \frac{12}{13} + arc\,sen\ \frac{16}{65}$ Resp.: $\frac{\pi}{2}$

c) $3\ arc\ tg\ \frac{1}{4}$ Resp.: $arc\,tg\,\frac{47}{52}$

d) $arc\,sen\ \frac{3}{\sqrt{73}} + arc\ \cos\frac{11}{\sqrt{146}} + arc\ sen\ \frac{1}{2}$ Resp.: $\frac{5\pi}{12}$

2.- Demostrar que:

a) $arc\ tg\ \frac{120}{119} - arc\ tg\ \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

b) $sen\left(arc\,sen\ \frac{1}{4} + arc\ \cos\frac{1}{4}\right) = 1$

c) $arc\ sen\ \frac{3}{5} + arc\ \cos\ \frac{12}{13} = arc\ sen\ \frac{56}{65}$

d) $arc\ tg\ 3 + arc\ tg\ \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

e) $arc\ tg\ \frac{1}{7} + 2\ arc\ tg\ \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

f) $arc\ sen\ \frac{4}{5} + 2\ arc\ tg\ \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$

g) $sen\left(2\ arcsen\ a\right) = 2a\ \sqrt{1-a^2}$

h) $\cos\left(arc\ tg\ \left(sen\left(arc\ tga\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{a^2+1}{1+2a^2}}$

i) $arc\,sen\,a - arc\ \cos b = arc\cos\left(b\sqrt{1-a^2} + a\sqrt{1-b^2}\right)$

j) $\operatorname{cosec} u = \cot g^2\ \frac{\alpha}{2}$, si $u = arc\cot g\sqrt{\cos\alpha} - arc\,tg\sqrt{\cos\alpha}$

k) $sen\alpha = \dfrac{sen^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}$, si $\alpha = arc\cot g\sqrt{\cos\theta} - arctg\sqrt{\cos\theta}$

3.- Determinar el valor de "α", siendo $(3\alpha) \in II.C.$ y

$3\alpha - arc\ sen\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{3\pi}{8}$ Resp.: $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

(Indicación : despejar 3α)

4.- Resolver:

a) $arc\cos x = arc\cos\sqrt{3}x + arc\,sen\ x$ Resp.: $0, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}$

b) $arc\cos x + arc\ sen\dfrac{-\sqrt{2}}{2} = arcsen\left(-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$ Resp.: 1

c) $arctg\ x = arc\cot gx$ Resp.: 1, -1

d) $arc\ tg\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{2}arc\ tg\ x,\ \ 1+x \neq 0$ Resp.: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

e) $arc\ tg\,x + arc\ tg\,(x-1) = arc\ tg\,(-3)$ Resp.: $-\dfrac{1}{3}$

f) $arc\cos\dfrac{1-a^2}{1+a^2} - arc\cos\dfrac{1-b^2}{1+b^2} = 2\ arc\ tg\ x$ Resp.: $\dfrac{a-b}{1+ab}$

g) $arc\cos x + arc\ tg\,x - \dfrac{\pi}{2}$ Resp.: 0

h) $arc\cos 2x - arc\,sen\,x - 0$ Resp.: $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

i) $arc\ tg\,(x+1) + arc\ tg\,(x-1) = arc\ tg\dfrac{8}{31}$ Resp.: $\dfrac{1}{4}$

j) $arc\ sen\ x - arc\cos x = arc\,sen\,(3x^2-2)$ Resp.: 1

k) $arc\ sen\,x = \dfrac{\pi}{2} + 2\ arc\cos x$ Resp.: 1

CAPITULO IV

EJERCICIOS DE ECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Resolveremos ecuaciones trigonométricas, expresando su solución general, para luego particularizarla en el intervalo indicado en ellas.

Todas aquellas soluciones que no satisfagan la ecuación original deben ser eliminadas del conjunto solución.

1. Resolver $\forall\, x \in [\, 0, 2\pi)$

   a. $sen\ x = sen\ 2x$

   Solución:

   $sen\ x = sen\ 2x \Rightarrow sen\ x = 2\ sen\, x \cos x \Rightarrow$

   $sen\, x - 2\ sen\ x \cos x = 0$, factorizando $sen\ x\,(\,1 - 2\cos x) = 0$

   Luego: i) $sen\, x = 0 \Rightarrow \quad x = 0 + 2\,k\,\pi = 2k\pi \Rightarrow x = 0 \in [\,0, 2\pi\,)$

   $x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pi \in [\,0, 2\pi\,)$

   ii) $1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

   $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\,k\,\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{3} \in [\,0, 2\pi\,)$

   $x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{3} \in [\,0, 2\pi\,)$

   $$\therefore \qquad S = \left\{\,0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

Observación:

En el ejercicio resuelto obtuvimos 4 soluciones generales expresadas en función de $k \in Z$. En cada una de ella k tomó valores enteros mayores o iguales que 0, es decir, $k = 0,1,2,........$, de tal manera que las soluciones sean ángulos positivos pertenecientes al intervalo establecido en el enunciado del ejercicio.

b. $\sec x + tg\ x = 0$

Solución:

$$\sec x + tg\,x = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{sen\ x}{\cos x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1 + sen\ x}{\cos x} = 0 \Rightarrow \quad 1 + sen\ x = 0, \quad \cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (1+2k)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$$

$$\therefore\ sen\ x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\,\pi \Rightarrow x = \frac{3\,\pi}{2} \in [\,0, 2\pi\,)$$

Pero este ángulo no es solución ya que: $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

Luego: $S = \phi$

c. $2\ sen\,x - \cos ec\ x = 1$

Solución:

$$2\ sen\ x - \frac{1}{sen\,x} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{2\ sen^2\,x - sen\,x - 1}{sen\,x} = 0 \Rightarrow$$

$$2\ sen^2\,x - sen\,x - 1 = 0, \quad sen\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\,\pi,\ k \in Z$$

$$(2\ sen\,x + 1)(sen\,x - 1) = 0 \Rightarrow$$

i) $2\ sen\,x + 1 = 0 \Rightarrow sen\,x = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \in [\,0, 2\pi\,)$$

$$x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \;\Rightarrow\; x=\frac{11\pi}{6}\in[\,0,2\pi\,)$$

ii) $sen\,x-1=0 \Rightarrow sen\,x=1 \Rightarrow$

$$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[\,0,2\pi\,)$$

$$\therefore \quad S=\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right\}.$$

d. $4\,sen\,x\cos x-2sen\,x+2\cos x-1=0.$

Solución: Observando la ecuación vemos que es posible factorizarla, es decir:

$2\,sen\,x(2\cos x-1)+(2\cos x-1)=0\Rightarrow$

$(2\cos x-1)(2\,sen\,x+1)=0\Rightarrow$

i) $2\cos x-1=0\Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\in[\,0,2\pi)$$

$$x=\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}\in[0,2\pi)$$

ii) $2\,sen\,x+1=0\Rightarrow sen\,x=-\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$x=\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}\in[0,2\pi)$$

$$x=\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\frac{11\pi}{6}\in[\,0,2\pi)$$

$$\therefore\; S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}.$$

e. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\ sen\,x = -1.$

Solución:

$2\cos^2 x + \sqrt{3}\ sen\,x + 1 = 0 \Rightarrow 2\left(1 - sen^2\,x\right) + \sqrt{3}\ sen\,x + 1 = 0 \Rightarrow$

$2\ sen^2\,x - \sqrt{3}\ sen\,x - 3 = 0 \Rightarrow$

$$sen\,x = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3+24}}{4} = \frac{\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$$

i) $sen\,x = \sqrt{3} > 1 \Rightarrow$ no hay solución

ii) $sen\,x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\,k\,\pi = \dfrac{4\pi}{3} + 2\,k\pi \Rightarrow x = \dfrac{4\pi}{3}$

$$x = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{3} + 2k\,\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore\ S = \left\{\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

f. $\dfrac{sen\,x}{1+\cos x} - 2 - \cot g\,x.$

Solución:

$$\frac{sen\,x}{1+\cos x} + \frac{\cos x}{sen\,x} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{sen^2 x + \cos x\left(1+\cos x\right) - 2\ sen\,x\left(1+\cos x\right)}{senx\left(1+\cos x\right)} = 0$$

$\Rightarrow sen^2 x + \cos x + \cos^2 x - 2\,sen\,x - 2\,sen\,x\cos x = 0,\ sen\,x \neq 0 \Rightarrow$

$x \neq k\,\pi, k \in Z$ ó $\cos x \neq -1 \Rightarrow x \neq \pi + 2k\,\pi,\ k \in Z$

$1 + \cos x - 2\ sen\,x - 2\ sen\,x\ \cos x = 0 \Rightarrow$

$\left(1 + \cos x\right) - 2\ sen\,x\left(1+\cos x\right) = 0 \Rightarrow$

$\left(1+\cos x\right)\left(1 - 2\,sen\,x\right) = 0$

Pero $1 + \cos x \neq 0 \Rightarrow$

$1 - 2\ sen\,x = 0 \Rightarrow sen\ x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$x=\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right\}$$

g. $senx-\sqrt{3}\cos x=1$

Solución:

$senx=\sqrt{3}\cos x+1 \Rightarrow \pm\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{3}\cos x+1$

elevando al cuadrado, obtenemos:

$1-\cos^2 x=3\cos^2 x+2\sqrt{3}\cos x+1$

$4\cos^2 x+2\sqrt{3}\cos x=0 \Rightarrow 2\cos x\left(2\cos x+\sqrt{3}\right)=0 \Rightarrow$

i) (*) $\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$

ii) $2\cos x+\sqrt{3}=0 \Rightarrow \cos x=\frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{5\pi}{6}$$

$$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}$$

Observaciones:

(a) (*) es equivalente a:

$$\cos x=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \\ x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \end{array}\right\} \quad (1)$$

ya que si en (*) hacemos $k=0,1,2,\ldots\ldots$ obtenemos que $x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\ldots\ldots,$ soluciones equivalentes a las obtenidas en (1).

(b) Las cuatro soluciones obtenidas, a pesar de pertenecer a $[0,2\pi)$, deben ser comprobadas, ya que se obtuvieron después de haber elevado al cuadrado la

ecuación original, operación que puede arrojar las llamadas "soluciones extrañas", que no satisfacen la ecuación original. Estas soluciones deben ser eliminadas del conjunto solución.

Comprobación:

1) Si $x = \frac{\pi}{2}$: $sen\,\frac{\pi}{2} - \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1,\ \therefore\ x = \frac{\pi}{2}$, es solución.

2) Si $x = \frac{3\pi}{2}$: $sen\frac{3\pi}{2} - \sqrt{3}\cdot\cos\frac{3\pi}{2} = -1 - 0 = -1 \neq 1,\ \therefore\ x = \frac{3\pi}{2}$, no es solución.

3) Si $x = \frac{5\pi}{6}$: $sen\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\cdot\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \neq 1,\ \therefore\ x = \frac{5\pi}{6}$, no es solución.

4) Si $x = \frac{7\pi}{6}$: $sen\frac{7\pi}{6} - \sqrt{3}\cdot\cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1,\ \therefore\ x = \frac{7\pi}{6}$, es solución.

$$\therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right\}.$$

h. $tg^2 x - 3\sec x + 3 = 0$.

Solución:

$tg^2 x - 3\sec x + 3 = 0 \Rightarrow$

$\frac{sen^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 3 = 0 \Rightarrow$

$\frac{sen^2 x - 3\cos x + 3\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0 \Rightarrow$

$(1 - \cos^2 x) - 3\cos x + 3\cos^2 x = 0,\ \cos x \neq 0 \Rightarrow$

$$x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2},\ k \in Z$$

$2\cos^3 x \quad 3\cos x - 1 = 0$

$$(2\cos x-1)(\cos x-1)=0 \Rightarrow$$

i) $2\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$

$$x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{5\pi}{3}$$

ii) $\cos x-1=0 \Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=0+2k\pi \Rightarrow x=0$

$$\therefore S=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},0\right\}.$$

l) $4\cos^2 x=1-2\,sen\,x\cos x.$

Solución:

$4\cos^2 x=1-2\,sen\,x\cos x \Rightarrow 4\cos^2 x=sen^2 x+\cos^2 x-2\,sen\,x\cos x \Rightarrow$

$4\cos^2 x=(sen\,x-\cos x)^2 \Rightarrow 4\cos^2 x-(sen\,x-\cos x)^2=0$,factorizando obtenemos:

$[2\cos x-(sen\,x-\cos x)]\,[2\cos x+(sen\,x-\cos x)]=0$

i) $2\cos x-sen\,x+\cos x=0 \Rightarrow 3\cos x=sen\,x \Rightarrow tg\,x=3 \Rightarrow$

$$x=arc\,tg\,3+k\pi$$

En este caso si $k=0,\ x=arc\,tg\,3\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Si $k=1,\ x=arc\,tg\,3+\pi\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

Si $k>1,\quad x\notin[0,2\pi)$

ii) $2\cos x+sen\,x-\cos x=0 \Rightarrow \cos x+sen\,x=0 \Rightarrow tg\,x=-1 \Rightarrow$

$$x=\frac{3\pi}{4}+k\pi \Rightarrow x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore S=\left\{arc\,tg\,3,\ arc\,tg\,3+\pi,\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}.$$

j. $2\,sen^2x + sen^2 2x = 2.$

Solución:

$$2\,sen^2x + sen^2 2x = 2 \Rightarrow 2\,sen^2x + 4\,sen^2x\cos^2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$sen^2x + 2sen^2x\left(1 - sen^2x\right) - 1 = 0 \Rightarrow 2\,sen^4x - 3\,sen^2x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(2sen^2x - 1\right)\left(sen^2x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

i) $2\,sen^2x - 1 = 0 \Rightarrow sen\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$$

$$x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$$

ii) $sen^2x - 1 = 0 \Rightarrow sen\,x = \pm 1 \Rightarrow$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

k. $sen^3x + \cos^3x = 1 - \frac{1}{2}\ sen2x.$

Solución:

$$sen^3x + \cos^3x - 1 + \frac{2}{2}\ sen\ x\cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\left(sen\,x + \cos x\right)\left(sen^2x - sen\,x\cos x + \cos^2x\right) + sen\,x\cos x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(sen\,x + \cos x\right)\left(1 - sen\,x\cos x\right) - \left(1 - sen\,x\cos x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(1 - sen\,x\cos x\right)\left(sen\,x + \cos x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

i) $1 - sen\,x\,\cos x = 0 \Rightarrow 2 = 2\,sen\,x \cos x \Rightarrow sen\,2x = 2 > 1$

$\Rightarrow$ no hay solución

ii) $sen\,x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow sen\,x + \cos x = 1,$ elevando al cuadrado

$sen^2 x + 2\,sen\,x \cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + sen\,2x = 1 \Rightarrow$

$sen\,2x = 0 \Rightarrow 2x = 0 + 2\,k\,\pi \Rightarrow$

$x = k\,\pi \Rightarrow x = 0, \pi$

$2x = \pi + 2k\pi \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Comprobamos las soluciones y obtenemos que: $S = \left\{ 0, \frac{\pi}{2} \right\}$.

l. $sen^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

<u>Solución:</u>

$sen^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(sen^2 x\right)^2 + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\left(1 - \cos^2 x\right)^2 + \cos^4 x = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 = 0 \Rightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$

$$\therefore \quad S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}.$$

m. $\cos x \quad sen\, x = \cos 2x.$

Solución:

$\cos x - sen\, x = \cos 2x \Rightarrow \cos x - sen\, x = \cos^2 x - sen^2 x \Rightarrow$

$(\cos x - sen\, x) - (\cos x - sen\, x)(\cos x + sen\, x) = 0 \Rightarrow$

$(\cos x - sen\, x)\left[1 - (\cos x + sen\, x)\right] = 0 \Rightarrow$

i) $\cos x - sen\, x = 0 \Rightarrow tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$

ii) $1 - \cos x - sen\, x = 0 \Rightarrow sen\, x + \cos x = 1$, elevamos al cuadrado:

$sen^2 x + 2 sen\, x \cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 1 + 2\, sen\, x \cos x = 1 \Rightarrow$

$2\, sen\, x \cos x = 0 \Rightarrow sen\, 2x = 0 \quad \Rightarrow$

$2x = 0 + 2k\pi \Rightarrow$

$x = k\pi \quad \Rightarrow x = 0, \pi$

$2x = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

Comprobando las soluciones, obtenemos que: $S = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{2} \right\}.$

n. $\dfrac{tg\, 2x}{\cos \frac{x}{2}} + 4\, sen \frac{x}{2} = 0.$

Solución:

$\dfrac{tg\, 2x}{\cos \frac{x}{2}} + 4\, sen \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \qquad \dfrac{tg\, 2x + 4\, sen \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow$

$tg\, 2x + 4\, sen \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = 0, \qquad \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$x \neq (2k+1)\pi,\ k \in Z \qquad (1)$

$$\frac{sen2x}{\cos 2x} + 2\ sen x = 0 \Rightarrow \frac{sen2x + 2\ sen x \cos 2x}{\cos 2x} = 0 \Rightarrow$$

$$2 sen x \cos x + 2\ sen x \cdot \cos 2x = 0, \qquad \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{4}$$

$$2\ sen x \left(\cos x + 2\cos^2 x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

i) $sen x = 0 \Rightarrow x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = 0$

$x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pi$ por (1) no es solución

ii) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

$\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pi$ por (1) no es solución

$$\therefore \quad S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}.$$

ñ. $tg\frac{x}{2} - tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

Solución:

$$tg\frac{x}{2} - tg\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1-\cos x}{sen x} - \frac{tg x + tg\frac{\pi}{4}}{1 - tg x \cdot tg\frac{\pi}{4}} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1-\cos x}{sen x} - \frac{\frac{sen x}{\cos x} + 1}{1 - \frac{sen x}{\cos x}} = 0 \Rightarrow \frac{1-\cos x}{sen x} - \frac{sen x + \cos x}{\cos x - sen x} = 0, \ \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow (1)\ x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z$$

$$\frac{\cos x - sen\,x - \cos^2 x + \cos x\, sen\,x - sen^2 x - sen\,x\,\cos x}{sen\,x\left(\cos x - sen\,x\right)} = 0 \Rightarrow$$

$\cos x - sen\,x - 1 = 0,\quad sen\,x \neq 0 \Rightarrow (2)\ x \neq k\,\pi,\, k \in Z \ \wedge \cos x \neq sen\,x$

$$\Rightarrow tg\,x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\,\pi,\, k \in Z$$

$\cos x - sen\,x = 1$, elevando al cuadrado, obtenemos:

$\cos^2 x - 2\cos x\, sen\,x + sen^2 x = 1 \Rightarrow 2\, sen\,x \cos x = 0 \Rightarrow$

$sen\,2x = 0 \Rightarrow \qquad 2x = 0 + 2\,k\,\pi \Rightarrow$

$x = k\,\pi$, por (2) no es solución

$2x = \pi + 2\,k\,\pi \Rightarrow$

$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, por (1) no es solución

$\therefore\ S = \phi.$

o. $2\cot g\dfrac{x}{2} = \left(1 + \cot g\, x\right)^2$. Considerando sus soluciones determinar el valor de $tg\,15°$.

Solución:

$$2\cot g\frac{x}{2} = \left(1 + \cot g\,x\right)^2 \Rightarrow \frac{2\left(\cos x + 1\right)}{sen\,x} = \left(1 + \frac{\cos x}{sen\,x}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\frac{2\left(\cos x + 1\right)}{sen\,x} = 1 + \frac{2\cos x}{sen\,x} + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} \Rightarrow$$

$$\frac{2\left(\cos x + 1\right)}{sen\,x} - 1 - \frac{2\cos x}{sen\,x} - \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2\cos x\, sen x + 2\, sen\,x - sen^2 x - 2\cos x\, sen\,x - \cos^2 x}{sen^2 x} = 0 \Rightarrow$$

$2\, sen\,x - 1 = 0, \qquad sen\,x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\,\pi,\, k \in Z$

$$sen\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\,k\,\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore\ S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} = \{30°, 150°\}$$

Para determinar el valor de $tg\,15°$, reemplacemos $x = 30°$ en la ecuación:

$$2\cot g 15° = 2\cot g\,\frac{30°}{2} = (1 + \cot g 30°)^2 \Rightarrow$$

$$2\cot g 15° = \left(1 + \sqrt{3}\right)^2$$

$$= 1 + 2\sqrt{3} + 3$$

$$= 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\cot g\ 15° = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow tg\ 15° = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$tg\ 15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore\ tg\ 15° = 2 - \sqrt{3}.$$

p. $sen\,x \cdot \cos^2 2x + \dfrac{sen\,x \cos 2x}{2} = sen\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2}$.

Solución:

$sen\,x \cdot \cos^2 2x + \dfrac{sen\,x \cdot \cos 2x}{2} = sen\dfrac{x}{2} \cdot \cos\dfrac{x}{2}$, multiplicamos por 2

$$2\,sen\,x \cdot \cos^2 2x + sen\,x \cdot \cos 2x = 2\,sen\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \Rightarrow$$

$$2\,sen\,x \cdot \cos^2 2x + sen\,x \cdot \cos 2x - sen\,x = 0 \Rightarrow$$

$$sen\,x\left(2\cos^2 2x + \cos 2x - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

i) $sen\,x = 0 \Rightarrow x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = 0$

$$x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \pi$$

ii) $2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow (2\cos 2x - 1)(\cos 2x + 1) = 0 \Rightarrow$

$$2\cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$\cos 2x + 1 = 0 \Rightarrow \cos 2x = -1 \Rightarrow$$

$$2x = \pi + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore S = \left\{ 0, \pi, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

q. $\cos x - \cos 7x = sen 4x.$

Solución: Si observamos los ángulos de esta ecuación y las funciones involucradas, transformaremos la diferencia de cosenos a producto, es decir:

$$\cos x - \cos 7x = sen 4x \Rightarrow -2\, sen \frac{x+7x}{2}\, sen \frac{x-7x}{2} = sen 4x \Rightarrow$$

$$-2\, sen 4x \cdot sen(-3x) = sen 4x \Rightarrow 2\, sen 4x \cdot sen 3x - sen 4x = 0 \Rightarrow$$

$$sen 4x\,(2\, sen 3x - 1) = 0 \Rightarrow$$

i) $sen 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

$$4x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

ii) $2\, sen 3x - 1 = 0 \Rightarrow sen 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}$$

$$3x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}=\frac{5\pi}{18},\frac{17\pi}{18},\frac{29\pi}{18}$$

$$S=\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{18},\frac{13\pi}{18},\frac{25\pi}{18},\frac{5\pi}{18},\frac{17\pi}{18},\frac{29\pi}{18}\right\}.$$

r. $sen 5x - sen\, 3x = \sqrt{2}\cos 4x.$

<u>Solución:</u>

$sen\, 5x - sen 3x = \sqrt{2}\cos 4x$, transformamos a producto:

$$2\cos\frac{5x+3x}{2}\cdot sen\frac{5x-3x}{2}=\sqrt{2}\cos 4x \Rightarrow$$

$$2\cos 4x\cdot sen x-\sqrt{2}\cos 4x=0 \Rightarrow$$

$$\cos 4x\left(2\,sen x-\sqrt{2}\right)=0 \Rightarrow$$

i) $\cos 4x = 0 \Rightarrow 4x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow$

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8}$$

$$4x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi \Rightarrow$$

$$x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{15\pi}{8}$$

ii) $2\,sen x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow sen\, x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ ¡Verifícalo!

$$\therefore\ S=\left\{\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8},\frac{13\pi}{8},\frac{3\pi}{8},\frac{7\pi}{8},\frac{11\pi}{8},\frac{15\pi}{8},\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right\}.$$

s. $sen\, 4x - sen 3x + sen\, 2\,x - sen x = 0.$

<u>Solución:</u> En este ejercicio también transformaremos a producto, asociando las funciones senos en forma adecuada:

$sen\, 4x - sen 3x + sen\, 2\,x \cdot sen x = 0 \Rightarrow$

$$(sen 4x + sen 2x) - (sen 3x + sen x) = 0 \Rightarrow$$

$$2\ sen\frac{4x+2x}{2}\cdot \cos\frac{4x-2x}{2} - 2\ sen\frac{3x+x}{2}\cdot\cos\frac{3x-x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$2\ sen 3x \cdot \cos x - 2\ sen\ 2x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos x\,(sen 3x - sen 2x) = 0 \Rightarrow \cos x\,(sen 3x - sen 2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x\left(2\cos\frac{3x+2x}{2}\cdot sen\frac{3x-2x}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\cos x \cdot \cos\frac{5x}{2}\cdot sen\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow$$

i) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ¡Verifícalo!

ii) $\cos\frac{5x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{5}, \pi, \frac{9\pi}{5}$

$$\Rightarrow \frac{5x}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{5} + \frac{4k\pi}{5} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5},$$

iii) $sen\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 + 2k\pi \Rightarrow x = 4k\pi \Rightarrow x = 0$

$\frac{x}{2} = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = 2\pi + 4k\pi \Rightarrow$ no hay solución

$$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{5}, \pi, \frac{9\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, 0\right\}.$$

t. $sen\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos x = 0.$

Solución:

$$sen\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos x = 0 \Rightarrow sen\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2\cos\frac{3x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - x}{2}\cdot sen\frac{3x - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + x}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\cos\frac{2x + \frac{\pi}{6}}{2}\cdot sen\frac{4x - \frac{5\pi}{6}}{2} = 0 \Rightarrow$$

i) $\cos\dfrac{2x+\frac{\pi}{6}}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{2x+\frac{\pi}{6}}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$

$$2x+\frac{\pi}{6} = \pi + 4k\pi \Rightarrow$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 4k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{2x+\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow$$

$$2x+\frac{\pi}{6} = 3\pi + 4k\pi \Rightarrow$$

$$2x = \frac{17\pi}{6} + 4k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12}$$

ii) $sen\dfrac{4x-\frac{5\pi}{6}}{2} = 0 \Rightarrow \dfrac{4x-\frac{5\pi}{6}}{2} = 0 + 2k\pi \Rightarrow$

$$4x - \frac{5\pi}{6} = 4k\pi \Rightarrow$$

$$4x = \frac{5\pi}{6} + 4k\pi \Rightarrow$$

$$x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}$$

$$\frac{4x-\frac{5\pi}{6}}{2} = \pi + 2k\pi \Rightarrow$$

$$4x - \frac{5\pi}{6} = 2\pi + 4k\pi \Rightarrow$$

$$4x = \frac{17\pi}{6} + 4k\pi \Rightarrow$$

$$x=\frac{17\pi}{24}+k\pi \Rightarrow x=\frac{17\pi}{24},\frac{41\pi}{24}$$

$$\therefore\ S=\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{17\pi}{12},\frac{5\pi}{24},\frac{29\pi}{24},\frac{17\pi}{24},\frac{41\pi}{24}\right\}.$$

u. $2\,sen\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+1=0.$

Solución:

$$2\,sen\left[-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)\right]+1=0 \Rightarrow -2\,sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)+1=0 \Rightarrow -2\cos\frac{x}{2}+1=0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi \Rightarrow x=\frac{10\pi}{3}\notin[0,2\pi)$$

$$\therefore\quad S=\left\{\frac{2\pi}{3}\right\}.$$

v. $\cos 3x-\cos x\quad sen\,2x=0.$

Solución:

$$(\cos 3x-\cos x)-sen\,2x=0 \Rightarrow -2\,sen\,2x\cdot sen\,x-sen\,2x=0 \Rightarrow$$

$$-sen\,2x\,(2\,sen\,x+1)=0 \Rightarrow$$

i) $sen\,2x=0 \Rightarrow 2x=0+2k\pi \Rightarrow x=k\pi \Rightarrow x=0,\pi$

$$2x=\pi+2k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Rightarrow x=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$$

ii) $2\,sen\,x+1=0 \Rightarrow sen\,x=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}$$

$$x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow x=\frac{11\pi}{6}$$

$$\therefore\ S=\left\{0,\pi,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

Resolver $\forall\ x \in [\ 0,\ 2\pi]$

1) $2\ sen^2 x + 3\cos x = 0$

2) $\cot g\, x + \cot g\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2$

3) $sen 4x - 2\ sen 2x = 0$

4) $tg\ 2x\ +\ 2\ sen x = 0$

5) $tg(\ 2x - 15°) + 1 = 0$

6) $sen 3x = 8\ sen^3 x$

7) $4\ sen\frac{x}{2} + \frac{tg\, 2x}{\cos\frac{x}{2}} = 0$

8) $sen(\ 30° + x) - \cos(60° + x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

9) $sen x(\ 2\cos 4x - 1)(\cos x + 3) = 0$

10) $tg 3x = tg\, x$

11) $sen^2 x + 4\cos x \cdot tg\, x - 21 = 0$

12) $\cos 4x + sen 3x - \cos 2x + sen x = \frac{1}{2}$

13) $sen\ 3x = sen 2x - sen x$

14) $\cos 5x + \cos x = -2\cos 2x$

15) $(\ 1 + sen 2x)(\ 1 - tg\, x) = 1 + tg\, x$

16) $sen 4x \cdot \cos x = \frac{1}{4} + sen\frac{5x}{2} \cdot \cos\frac{5x}{2}$

17) $\cos 5x - \cos 3x = sen 4x$

18) $sen 11x \cdot sen\ 4x + sen\ 5x \cdot sen\ 2x = 0$

19) $\sec 4x - \sec 2x = 2$

20) $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1$

RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS:

1) $S=\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

2) $S=\{30°, 150°, 210°, 330°\}$

3) $S=\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi\right\}$

4) $S=\left\{0,\pi,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3},2\pi\right\}$

5) $S=\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{17\pi}{12},\frac{23\pi}{12}\right\}$

6) $S=\left\{0,\pi,2\pi,\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

7) $S=\left\{0,2\pi,\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

8) $S=\left\{\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right\}$

9) $S=\left\{0,\pi,2\pi,\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12},\frac{13\pi}{12},\frac{19\pi}{12},\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{17\pi}{12}\right\}$

10) $S=\{0,\pi,2\pi\}$

11) $S=\phi$

12) $S=\left\{\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{18},\frac{13\pi}{18},\frac{25\pi}{18},\frac{5\pi}{18},\frac{29\pi}{18}\right\}$

13) $S=\left\{0,\frac{\pi}{2},\pi,2\pi,\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

14) $S=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\pi}{3}\right\}$

15) $S=\left\{0, \pi, 2\pi, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

16) $S=\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}\right\}$

17) $S=\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\right\}$

18) $S=\left\{x=\frac{k\pi}{9} \text{ ó } x=\frac{k\pi}{6}, x\in[0, 2\pi]\right\}$

19) $S=\left\{x=\frac{(2k+1)\pi}{10} \text{ ó } x=\frac{(2k+1)\pi}{2}, x\in[0, 2\pi]\right\}$

20) $S=\left\{x=k\pi-\frac{\pi}{4}, x\in[0, 2\pi]\right\}$

BIBLIOGRAFICA

1. HALL, H.S. – Knight, S.R.
   Trigonometría Elemental
   Editorial Hispano Americana, México, 1961

2. Innocenti V., Gioanfranco – Villanueva, Felipe
   Lecciones de Trigonometría
   Editorial Limusa S.A., México, 1982

3. Ejercicios creados por las académicas responsables